

Exercices pour le cours Econométrie et évaluations statistiques (Ch. I).

Introduction – Modèle de régression simple

Exercice 1. Montrez que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2 \\ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^N y_i^2 - N\bar{y}^2 \\ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^N y_i x_i - N\bar{y}\bar{x}.\end{aligned}$$

Exercice 2. Prouvez que

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})y_i \\ \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^N x_i(y_i - \bar{y})\end{aligned}$$

Concluez que:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})x_i}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Exercice 3. Soit les conditions de premier ordre du problème de minimisation des carrés des résidus:

$$\begin{aligned}-2 \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) &= 0, \\ -2 \sum_{i=1}^N x_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) &= 0.\end{aligned}$$

Montrez que

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \\ \widehat{\beta}_0 &= \bar{y} - \widehat{\beta}_1 \bar{x}.\end{aligned}$$

[Indice: La solution se trouve dans: Wooldridge, Jeffrey M., Introductory Econometrics: A Modern Approach, 5th Edition. South-Western College Pub (2013)].

Exercice 4. Un chercheur utilise un échantillon de 30 observations pour étudier la relation entre une variable dépendante y_i et une variable indépendante x_i . Une analyse préliminaire de l'échantillon fournit les statistiques suivantes:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N y_i &= 15 & \sum_{i=1}^N x_i &= 5 & \sum_{i=1}^N y_i^2 &= 120 & \sum_{i=1}^N x_i^2 &= 15 \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i &= 30,\end{aligned}$$

avec $N = 30$. Utilisez ces informations pour:

1. Calculez les estimateurs des MCO de la constante β_0 et de la pente β_1 .
2. Calculez la valeur du R-carré, le coefficient de détermination, de la droite de régression de l'échantillon.

Rappel (Wooldridge, Appendix A.1):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2 \\ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^N y_i^2 - N\bar{y}^2 \\ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^N y_i x_i - N\bar{y}\bar{x}.\end{aligned}$$

Exercice 5. Considérez le modèle de régression simple suivant:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u.$$

et celui où le rôle des variables x et y est inversé:

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 y + v.$$

Prouvez la proposition suivante:

$$\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1 = R^2,$$

où $\hat{\alpha}_2$ et $\hat{\beta}_2$ sont les estimateurs des MCO de α_2 et β_2 .

Exercice 6. Soit c une constante. Prouvez les propositions suivantes:

1. $\sum_{i=1}^N (x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2c \sum_{i=1}^N x_i + Nc^2$
2. $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c = NM c$