

Exercices pour le cours Econométrie et évaluations statistiques (Ch. III).

**Quelques rappels: Variable aléatoire discrète – Variable aléatoire continue
– Dictionnaire des propriétés**

Exercice 1. Soit les variables aléatoires $x_1, x_2, \dots, x_N$ et les constantes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$. Sachant que $\mathbb{E}(x_i) = 0$, que $\text{Var}(x_i) = 1$ et que $\text{Cov}(x_i, x_j) = 0$ pour $i, j = 1, \dots, N$, calculez la valeur des expressions suivantes en précisant à chaque fois les propriétés que vous utilisez:

1.

$$\mathbb{E} \left(a_0 + \sum_{i=1}^N a_i x_i \right),$$

2.

$$\text{Var} \left(a_0 + \sum_{i=1}^N a_i x_i \right),$$

3.

$$\mathbb{E} \left(a_0 + \sum_{i=1}^N a_i x_i \left| x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \dots, x_N = x_N^* \right. \right),$$

où $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ sont des valeurs particulières que peuvent prendre $x_1, x_2, \dots, x_N$,

4.

$$\text{Var} \left(a_0 + \sum_{i=1}^N a_i x_i \left| x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \dots, x_N = x_N^* \right. \right).$$

Exercice 2. Soit une pièce de monnaie. Si elle tombe sur pile, la variable aléatoire z est égale à 2. Si elle tombe sur face, la variable aléatoire z est égale à 1. Vous lancez cette pièce trois fois. Calculez les expressions suivantes:

1. la probabilité que la pièce tombe 2 fois sur pile et 1 fois sur face et la probabilité qu'elle tombe trois fois sur pile (Astuce: faites la liste de toutes les possibilités),
2. l'espérance de gain total

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^3 z_i \right),$$

3. la variance de gain total

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^3 z_i \right),$$

4. l'espérance de gain total sachant que, pour le premier jet, la pièce est tombée sur pile

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^3 z_i \middle| z_1 = 2 \right)$$

[Astuce: les variables z_i sont indépendantes les unes des autres]

5. la variance de gain total sachant que, pour le premier jet, la pièce est tombée sur pile

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^3 z_i \middle| z_1 = 2 \right).$$

[Astuce: les variables z_i sont indépendantes les unes des autres]

Exercice 3. Soit le jeu suivant avec un joueur et une banque. On lance une pièce de monnaie une succession de fois, tant qu'elle tombe sur pile. Le jeu se termine quand face apparaît pour la première fois et alors la banque paie son gain au joueur. Ce gain est initialement d'un euro, doublé pour chaque apparition de pile. Ainsi, le gain est de 1 euro si face apparaît au premier lancer, 2 si face apparaît au deuxième, 4 au troisième, 8 au quatrième, etc.

1. Quelle serait l'espérance du gain?
2. Comment interprétez-vous ce résultat? Combien seriez-vous prêts à payer pour participer à ce jeu? [Astuce: Il n'existe pas de bonne réponse unique pour cette dernière question mais il en existe au moins une mauvaise.]

Exercice 4. Soit une distribution de probabilité uniforme: une variable aléatoire x peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1 avec une même densité égale à 1. Donc:

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 \text{ si } x \in [0, 1] \text{ (c'est-à-dire } x \geq 0 \text{ et } x < 1) \\ &= 0 \text{ si } x < 0 \text{ ou } x \geq 1\end{aligned}$$

1. Représentez graphiquement la fonction $f(x)$, avec x en abscisse et $f(x)$ en ordonnée.
2. Quelle est la valeur de l'expression suivante:

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Astuce: L'intégrale calcule l'aire qui se trouve en dessous de la fonction entre $x = 0$ et $x = 1$. Utilisez le graphique de (a).

3. Quelle est la probabilité que x soit exactement égal à 0,3?
4. Quelle est la probabilité que x soit comprise entre 0,25 et 0,50?

Exercice 5. La variable aléatoire u a une variance égale à 4 et une espérance égale à 1. Comment transformer cette variable pour que

1. sa variance soit égale à 1 et son espérance égale à 0?
2. sa variance soit égale 16 et son espérance égale à 2?

Solution 5. Soit

$$u^* = \frac{u - m}{s}$$

la transformation de la variable u .

1. Si $m = 1$ et $s = 2$, alors

$$\mathbb{E}(u^*) = \frac{\mathbb{E}(u) - 1}{2} = 0$$

puisque $\mathbb{E}(u) = 1$, et

$$\text{Var}(u^*) = \frac{\text{Var}(u)}{4} = 1$$

puisque $\text{Var}(u) = 4$.

2. Si $m = 0$ et $s = 1/2$, alors

$$\mathbb{E}(u^*) = \frac{\mathbb{E}(u) - m}{1/2} = 2$$

et

$$\text{Var}(u^*) = \frac{\text{Var}(u)}{(1/2)^2} = 16.$$

Exercice 6. Considérez la distribution jointe de chacun des couples de variables aléatoires suivants. Pour chacun de ces couples, dites si les variables sont, selon vous, indépendantes ou non? Argumentez brièvement.

1. le salaire horaire et le niveau d'éducation
2. le salaire horaire des conjoints vivant ensemble
3. le salaire horaire des parents et l'éducation des enfants
4. le salaire horaire et les heures de travail

Exercice 7 Un individu peut être au chômage ($x = 1$) ou en emploi ($x = 0$). Son niveau de bien-être psychologique (y) prend trois valeurs possibles : bas (1), moyen (2), élevé (3). On suppose que la distribution jointe est donnée par :

	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = 0$	0, 10	0, 20	0, 30
$x = 1$	0, 20	0, 10	0, 10

1. Est-ce une distribution de probabilité? Quelle condition doit être satisfaite?
2. Calculer les distributions marginales de x et de y .
3. Calculer la distribution conditionnelle de y pour x donné [cette distribution peut être représentée par un tableau comme celui de l'énoncé].
4. Est-ce que selon vous les variables x et y sont indépendantes?