

EX 1

$$1) \quad y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

Ventes

↑  
commercials

 $i = \text{jour de l'observation}$ 

1 POINT

$$2) \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_i x_i y_i - N \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - N \bar{x}^2}$$

$$\sum_i x_i = 1 + 2 + 3 + 2 + 3 = 11$$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_i x_i \\ &= \frac{11}{5} \\ &= 2,2\end{aligned}$$

$$\sum_i y_i = 4 + 6 + 10 + 8 + 12 = 40$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{N} \sum_i y_i \\ &= \frac{40}{5} \\ &= 8\end{aligned}$$

$$\sum x_i y_i = 4 \times 1 + 6 \times 2 + 10 \times 3 + 8 \times 2 + 12 \times 3$$
$$= 98$$

$$\begin{aligned}\sum x_i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 \\ &= 27\end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{98 - 5 \times 2,2 \times 8}{27 - 5 \times (2,2)^2}$$

$$= 3,57$$

2 POINTS

$$\hat{\beta}_0 = 8 - 3,57 \times 2,2$$

$$= 0,146$$

- 3) Si aucun commercial n'est dans le magasin, les ventes d'ordinateurs sont estimées à 0,146 millions d'euros la journée, soit 146 €.

1 POINT

$$4) \hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

$$= y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

$$\hat{u}_1 = 4 - 0,146 - 3,57 \times 1 = 0,284$$

$$\hat{u}_2 = 6 - 0,146 - 3,57 \times 2 = -1,286$$

$$\hat{u}_3 = 10 - 0,146 - 3,57 \times 3 = -0,856$$

$$\hat{u}_4 = 8 - 0,146 - 3,57 \times 2 = 0,714$$

$$\hat{u}_5 = 12 - 0,146 - 3,57 \times 3 = 1,144$$

$$\sum \hat{u}_i = 0$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N - K - 1}$$

$$= \frac{0,284^2 + (-1,286)^2 + (-0,856)^2 + 0,714^2 + 1,144^2}{5 - 1 - 1}$$

$$= 1,4286$$

$$\begin{aligned}
 \hat{V}(\hat{\beta}_1) &= \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \\
 &= \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2} \\
 &= \frac{1,4286}{27 - 5 \times 2,2^2} \\
 &= 0,5102
 \end{aligned}$$

2 POINTS

$$\begin{aligned}
 5) \quad R^2 &= \frac{\left[ \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2} \\
 &= \frac{(\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y})^2}{(\sum x_i^2 - N\bar{x}^2)(\sum y_i^2 - N\bar{y}^2)} \\
 &= \frac{(98 - 5 \times 2,2 \times 8)^2}{(27 - 5 \times 2,2^2)(\sum y_i^2 - 5 \times 8^2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_i y_i^2 &= 4^2 + 6^2 + 10^2 + 8^2 + 12^2 \\
 &= 360
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{100}{2,8 \times 40} \\
 &= \frac{25}{28} \\
 &\approx 0,8929
 \end{aligned}$$

1,5 POINTS

Le nombre de commerciaux en magasin explique 89,3 % des variations des ventes d'ordinateurs.

$$6) \quad \Delta y = \hat{\beta}_1 \Delta x$$

$$10 = 3,57 \times \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{10}{3,57}$$

$$\Delta x = 2,8011$$

4,5 POINTS

Une augmentation de 3 commerciaux sur place augmente les ventes d'ordinateurs de 10 000 €.

$$7) \quad \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times 10$$

$$= 0,146 + 3,57 \times 10$$

$$= 35,846$$

Avec 10 commerciaux sur place, Darty vendrait pour 35 846 € d'ordinateurs.

1 POINT

## EX2

1)  $\hat{\beta}_0$  : Si un individu ne travaille pas (work = 0), n'a reçu aucune éducation scolaire (educ = 0) et vient de naître (age = 0), il dormira en moyenne 3 638,25 minutes par semaine.

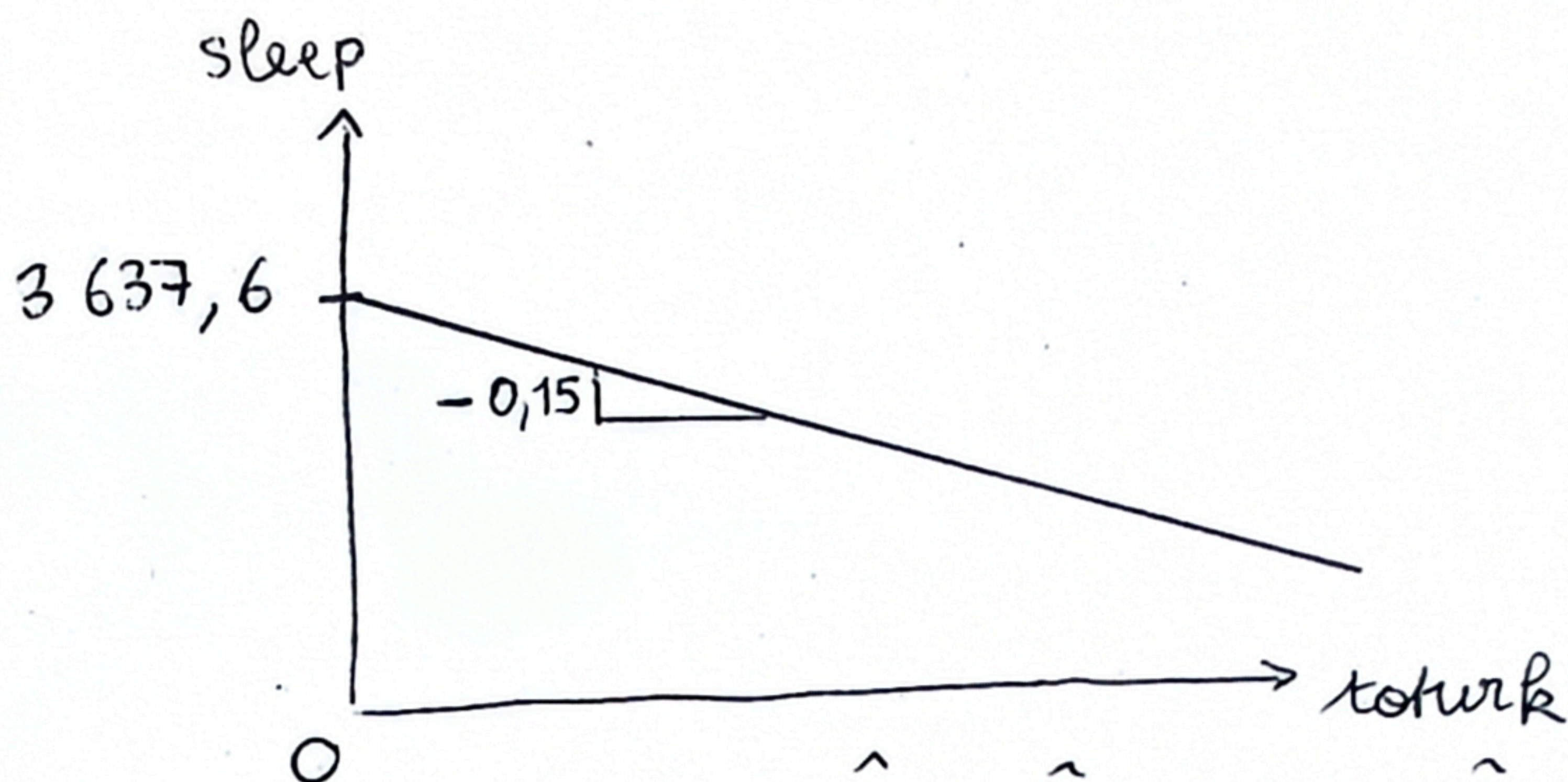
↳  $\hat{\beta}_0 > 0 \rightarrow$  ne peut pas être positif, logique.

$\hat{\beta}_1$  : 1 minute de travail supplémentaire est censé diminuer la durée de sommeil de 0,15 minute par semaine.

↳ + on travaille, - on dort en moyenne.

$$\hat{\beta}_1 < 0$$

1,5 POINTS



ordonnée à l'origine.  $= \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_2 \times \text{educ} + \hat{\beta}_3 \times \text{age}$   
 $= 3638,25 - 11,13 \times 5 + 2,20 \times 25$   
 $= 3637,6$

**1,5 POINTS**

3)  $\Delta \text{sleep} = \hat{\beta}_1 \Delta \text{totwork} + \hat{\beta}_2 \Delta \text{educ} + \hat{\beta}_3 \Delta \text{age}$

$$\Delta \text{sleep} = \text{sleep}_j - \text{sleep}_i$$

$$\Delta \text{educ} = \text{educ}_j - \text{educ}_i = 2$$

$$\Delta \text{age} = \text{age}_j - \text{age}_i = 30 - 27 = 3$$

$$\Delta \text{totwork} = 0$$

$$\Delta \text{sleep} = -11,13 \times 2 + 2,2 \times 3$$

$$= -15,66$$

L'individu j dort 16 minutes de moins que l'individu i.

**2 POINTS**

4)  $\tilde{\text{sleep}} = \text{sleep} \times \frac{1}{60}$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} = \hat{\beta} \times \frac{1}{60}$$

**1,5 POINTS**

- 5)  $\hat{\beta}_4 > 0 \rightarrow$  pourquoi pas  
 $\hat{\beta}_5 > 0 \rightarrow$  pas logique. Un nourrisson fait rarement ses nuits et réveille ses parents.  $\beta_5 < 0$ .

1 POINTS

- 6)  $\hat{\beta}_1 \rightarrow$  dans le modèle précédent = biais de variable omise. (biais positif).

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \hat{\delta}_1 \beta_4 \\ \text{avec } x_1 = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 x_4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \hat{\gamma}_1 \beta_5 \\ \text{avec } x_1 = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 x_5 \end{cases}$$

$$\beta_1 < 0$$

$$\beta_4 > 0$$

$$\beta_5 > 0 \quad (\text{supposons que c'est vrai})$$

$$\delta_1 > 0 \rightarrow \text{hommes travaillent + en moyenne que les femmes}$$

$$\gamma_1 < 0 \rightarrow \text{avoir un bébé diminue les heures de travail (congé parental)}$$

$$\left[ \gamma_1 > 0 \rightarrow \text{possible que le parent travaille + pour payer nourrice ou subvenir aux besoins de l'enfant.} \right]$$

$$\text{Modèle 1 : } \begin{cases} \text{biais positif} & \text{car } \beta_4 > 0 \text{ et } \delta_1 > 0 \\ \text{"} & \text{"} & \text{si } \begin{cases} \beta_5 > 0 \text{ et } \gamma_1 > 0 \\ \beta_5 < 0 \text{ et } \gamma_1 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

2,5 POINTS