

Microéconomie III

Partie III — Séances V-VIII

Décider face au risque · Licence 3 — Économie

Anderson VIL

vladerinson@gmail.com

THEMA

CY Cergy Paris Université

Année universitaire 2026–2027

Où en sommes-nous ?

Partie I. Le modèle de référence et ses trois fissures. L'une d'elles posait la question

Et si le résultat est aléatoire ?

Avec 85 000 € certains ou 100 000 € et 40 000 € avec probabilités $3/4$ et $1/4$, l'espérance de richesse est la même. Beaucoup choisissent pourtant le montant certain.

Partie II. L'incertitude portait sur le coup de l'autre joueur. La météo de l'agriculteur, elle, n'était pas un jeu.

Le maximin ignorait les probabilités, l'espérance de gain ignorait l'attitude face au risque. Un troisième critère était annoncé.

Partie III. L'incertitude porte sur un état de la nature, ignoré de tous de la même façon.

Ce que vous saurez faire à la fin de la partie

1. Décrire une situation risquée par une loterie, calculer son espérance, sa variance et son écart-type
2. Représenter un choix risqué dans un graphique de consommations contingentes et écrire son utilité espérée
3. Dire si une personne est averse au risque, neutre ou attirée par le risque, calculer son équivalent certain et sa prime de risque
4. Expliquer pourquoi diversifier, mutualiser et s'assurer réduisent le risque, et chiffrer ce que vaut une information
5. Choisir entre un placement sûr et un placement risqué dans le plan (écart-type, rendement espéré), lire le prix du risque et le bêta d'un actif
6. Reconnaître des comportements face au risque que le modèle standard explique mal

Au programme

Séance V. Décrire le risque et choisir

- A. Décrire le risque
- B. Choisir face au risque

Séance VI. Attitudes face au risque et réduction du risque

- C. Attitudes face au risque
- D. Réduire le risque

Séance VII. Actifs risqués

- E. La demande d'actifs risqués
- F. L'équilibre des marchés d'actifs risqués

Séance VIII. Quand le modèle standard ne suffit pas

- G. Bulles et économie comportementale
- Bilan de la partie

Sources principales. Pindyck et Rubinfeld, *Microeconomics*, 8^e éd., chapitre 5. Varian, *Intermediate Microeconomics*, 9^e éd., chapitres 12 et 13.

Des boutons

- ▶ [Code](#) mène au code Python et R de la figure ou du calcul
- ▶ [Exemple alternatif](#) mène à un second exemple de la même notion
- ▶ [Retour](#) ramène à la slide de départ

Quatre simulateurs

- ▶ Des pages web autonomes, qui tirent au hasard à chaque lancement
- ▶ Chacun vérifie un résultat du cours, la valeur théorique est affichée à côté du résultat simulé

Les exemples des livres gardent leurs chiffres et leurs dollars, pour que vous puissiez les retrouver. Les exemples construits pour le cours sont situés en France.

Séance V. Décrire le risque et choisir

A. Décrire le risque

Inès possède 10 000 €, dont sa voiture.

Une année sur dix, elle provoque un accident
qui lui coûte 6 400 €.

Que vaut sa situation ? Combien paierait-elle pour ne plus y
penser ?

Exemple construit pour le cours. Il nous accompagne jusqu'à la fin de la séance VI.

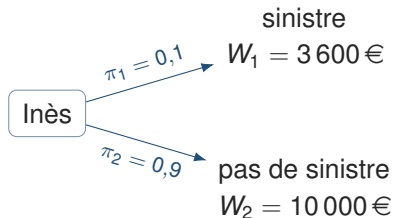
Une loterie

Loterie

Une **loterie** (*lottery*) décrit une situation risquée par la liste de ses issues possibles $W_1, \dots, W_S$ et de leurs probabilités $\pi_1, \dots, \pi_S$, avec $\pi_s \geq 0$ et $\sum_s \pi_s = 1$.

Chaque issue correspond à un **état de la nature** (*state of nature*). Un seul se réalisera.

Pindyck et Rubinfeld distinguent, après Knight, le *risque* (issues et probabilités connues) de l'*incertitude* (probabilités inconnues), puis emploient les deux mots indifféremment. Nous ferons de même.



D'où viennent les probabilités ?

Une compagnie explore un gisement de pétrole en mer. Son action, qui vaut 30 dollars, vaudra 40 dollars en cas de succès et 20 dollars en cas d'échec.

Probabilité objective

Sur les 100 dernières explorations comparables, 25 ont réussi. La probabilité $1/4$ repose sur une fréquence observée.

Probabilité subjective

Personne n'a jamais foré dans cette zone. La probabilité traduit un jugement. Deux investisseurs, mieux ou moins bien informés, peuvent en retenir deux différentes et faire des choix différents.

L'espérance

Espérance

L'**espérance** (*expected value*) d'une loterie est la moyenne de ses issues pondérées par leurs probabilités

$$E[W] = \pi_1 W_1 + \pi_2 W_2 + \cdots + \pi_S W_S = \sum_{s=1}^S \pi_s W_s.$$

Le pétrole

$$\frac{1}{4} \times 40 + \frac{3}{4} \times 20 = 25 \text{ dollars par action}$$

Inès

$$0,1 \times 3\,600 + 0,9 \times 10\,000 = 9\,360 \text{ €}$$

L'espérance mesure la tendance centrale, ce que l'on obtiendrait en moyenne si la situation se répétait un grand nombre de fois.

Même espérance, risques différents

Deux emplois d'été de vendeur, au même revenu espéré.

	Issue 1		Issue 2		revenu espéré
	proba.	revenu	proba.	revenu	
Emploi 1, à la commission	0,5	2 000	0,5	1 000	1 500
Emploi 2, salaire fixe	0,99	1 510	0,01	510	1 500

L'entreprise de l'emploi 2 peut faire faillite, avec une probabilité de 1 %. Les **écarts** à l'espérance (*deviations*) valent ± 500 pour l'emploi 1, +10 et -990 pour l'emploi 2.

Pondérés par les probabilités, les écarts se compensent toujours. Leur moyenne est nulle et ne mesure rien. On les élève au carré.

Revenus en dollars. Pindyck et Rubinfeld (2012), tableaux 5.1 et 5.2.

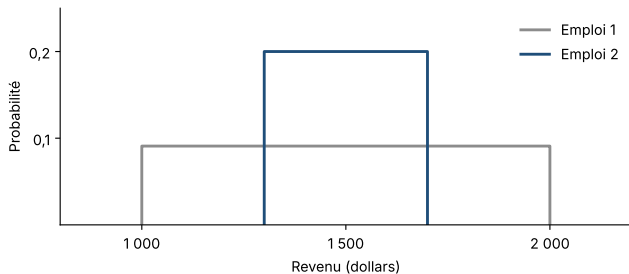
Variance et écart-type

$$\sigma_W^2 = \text{Var}(W) = \sum_{s=1}^S \pi_s (W_s - E[W])^2 \quad \sigma_W = \sqrt{\sigma_W^2}$$

	écarts au carré	variance	écart-type
Emploi 1	250 000 et 250 000	$0,5 \times 250\,000 + 0,5 \times 250\,000 = 250\,000$	500
Emploi 2	100 et 980 100	$0,99 \times 100 + 0,01 \times 980\,100 = 9\,900$	99,50

L'emploi 2 est bien moins risqué. L'écart-type s'exprime dans l'unité du revenu, la variance dans son carré. Le risque sera mesuré par l'écart-type.

Plus de deux issues



Emploi 1, revenus de 1 000 à 2 000 dollars par pas de 100, tous équiprobables.

Emploi 2, de 1 300 à 1 700 dollars.

Même espérance, 1 500 dollars.
Écarts-types 316,23 et 141,42.
La formule est la même, avec onze ou cinq termes.

Reproduction de la figure 5.1 de Pindyck et Rubinfeld (2012). Le livre arrondit la hauteur de l'emploi 1, $1/11 \approx 0,09$, à 0,1. Les écarts-types sont calculés pour le cours.

[► Code](#)

Inès a 3 600 € avec probabilité 0,1 et 10 000 € avec probabilité 0,9. Que valent l'espérance et l'écart-type de sa richesse ?

Inès a 3 600 € avec probabilité 0,1 et 10 000 € avec probabilité 0,9. Que valent l'espérance et l'écart-type de sa richesse ?

$$E[W] = 9\,360\,€$$

$$\begin{aligned}\sigma_W^2 &= 0,1 (-5\,760)^2 + 0,9 \times 640^2 \\ &= 3\,686\,400\end{aligned}$$

$$\sigma_W = 1\,920\,€$$

Avec deux issues, un raccourci

$$\sigma_W^2 = \pi_1 \pi_2 (W_2 - W_1)^2$$

$$0,1 \times 0,9 \times 6\,400^2 = 3\,686\,400$$

Inès perd en moyenne 640 € par an, mais l'écart-type de sa richesse est trois fois plus grand. Retenez ces deux nombres, 640 et 1 920.

L'espérance et l'écart-type suffisent-ils pour choisir ?

Ajoutons 100 dollars à chaque issue de l'emploi 1.

	revenu espéré	écart-type
Emploi 1 modifié	1 600	500
Emploi 2	1 500	99,50

Moment interactif. Lequel prenez-vous ? Levez la main.

Le premier rapporte plus en moyenne, le second est plus sûr. Le choix dépend de la personne. Il faut une théorie qui dise comment chacun pèse le rendement contre le risque.

Application, dissuader le stationnement en double file

Se garer en double file fait gagner l'équivalent de 5 dollars de temps. Si chaque infraction était sanctionnée, une amende de 6 dollars suffirait.

amende	probabilité d'être verbalisé	amende espérée
6	1	6
50	0,1	5
500	0,01	5

Contrôler coûte cher. Une forte amende associée à un contrôle rare dissuade à moindre coût, et d'autant mieux que les conducteurs n'aiment pas le risque. Il faut donc savoir décrire cette attitude.

Décrire le risque

- ▶ Une situation risquée se décrit par une loterie, ses issues W_s et leurs probabilités π_s , objectives ou subjectives
- ▶ $E[W] = \sum_s \pi_s W_s$ mesure la tendance centrale, $\sigma_W = \sqrt{\sum_s \pi_s (W_s - E[W])^2}$ mesure la dispersion
- ▶ Deux loteries de même espérance peuvent être très différemment risquées. L'espérance seule ne suffit pas pour choisir

Séance V. Décrire le risque et choisir

B. Choisir face au risque

Pourquoi l'espérance ne suffit pas

85 000 € certains,
ou 100 000 € avec probabilité $3/4$ et 40 000 € sinon ?

- ▶ Les deux options ont la même espérance, 85 000 €
- ▶ Si l'on préfère systématiquement l'une, le critère n'est pas l'espérance de richesse
- ▶ Il faut un objet sur lequel porter des préférences, et une façon de les représenter

Un bien par état de la nature

Varian propose une idée simple. L'argent dont on dispose dans des circonstances différentes est un *bien différent*.

- ▶ 1 000 € après un accident ne valent pas 1 000 € sans accident
- ▶ Une glace un jour de canicule n'est pas le même bien qu'une glace un jour de pluie froide

Consommation contingente

Un **plan de consommation contingente** (*contingent consumption plan*) indique ce que l'on consommera dans chaque état de la nature.

Choisir une loterie revient à choisir un plan contingent. Tout l'outillage de la Partie I s'applique, panier, contrainte budgétaire, courbes d'indifférence, TMS.

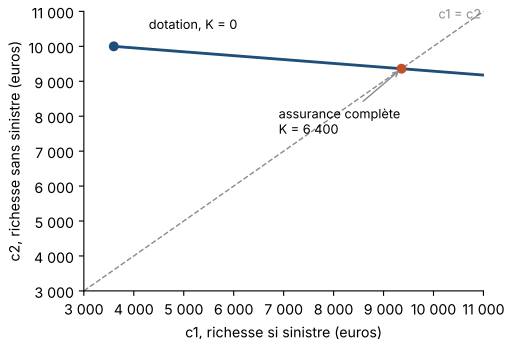
Acheter un billet de loterie

Vous avez 100 dollars. Le billet coûte 5 dollars et rapporte 200 dollars s'il est tiré.

	billet tiré	billet non tiré
Sans billet	100	100
Avec billet	295	95

Acheter le billet ne crée pas de richesse, il la *déplace* d'un état vers l'autre. On renonce à 5 dollars dans l'état « non tiré » pour en obtenir 195 de plus dans l'état « tiré ».

Le graphique de la consommation contingente



c_1 richesse si sinistre, c_2 sans sinistre.

- **Dotation** (*endowment*) (3 600 ; 10 000)
- Sur la diagonale, richesse certaine
- Assurer K coûte la prime γK dans les deux états

$$c_1 = 3\,600 + K - \gamma K \quad c_2 = 10\,000 - \gamma K$$

Avec $\gamma = 0,1$, assurer $K = 6\,400$ mène sur la diagonale, en (9 360 ; 9 360).

Un euro de plus assuré coûte γ dans l'état 2 et rapporte $1 - \gamma$ dans l'état 1

$$\frac{\Delta c_2}{\Delta c_1} = -\frac{\gamma K}{K - \gamma K} = -\frac{\gamma}{1 - \gamma}.$$

Tout se passe comme si la consommation coûtait γ dans l'état 1 et $1 - \gamma$ dans l'état 2

$$\gamma c_1 + (1 - \gamma) c_2 = \gamma W_1 + (1 - \gamma) W_2.$$

Inès, avec $\gamma = 0,1$ $0,1 c_1 + 0,9 c_2 = 9\,360$, pente $-1/9$.

Des préférences sur les plans contingents

La valeur d'un euro dans un état dépend de la probabilité que cet état se réalise.
On écrit l'utilité $u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2)$.

Substituts parfaits

$$u = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2$$

C'est l'espérance de la consommation.
Seule la moyenne compte.

Cobb-Douglas

$$u = c_1^\pi c_2^{1-\pi}$$

ou, en logarithme,
 $\ln u = \pi \ln c_1 + (1 - \pi) \ln c_2$.

Des courbes d'indifférence convexes traduisent une préférence pour une consommation régulière d'un état à l'autre.

L'utilité espérée

Utilité espérée

Les préférences ont la **propriété d'utilité espérée** (*expected utility*) s'il existe une fonction u telle que

$$U(c_1, \dots, c_S) = \pi_1 u(c_1) + \dots + \pi_S u(c_S) = E[u(W)] = EU.$$

u est la fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern.

- ▶ On fait la moyenne des *utilités* des issues, pas l'utilité de la moyenne
- ▶ Avec $u(c) = c$, on retrouve l'espérance. Avec $u(c) = \ln c$, la Cobb-Douglas de la slide précédente
- ▶ Si un état est certain, $\pi_S = 1$, l'utilité espérée vaut $u(c_S)$

L'utilité espérée d'Inès

Supposons $u(W) = \sqrt{W}$.

Sans assurance

$$\begin{aligned} EU &= 0,1\sqrt{3\,600} + 0,9\sqrt{10\,000} \\ &= 0,1 \times 60 + 0,9 \times 100 = 96 \end{aligned}$$

Si elle avait 9 360 € certains

$$u(9\,360) = 96,75 > 96$$

L'espérance est la même, l'utilité espérée ne l'est pas. Le critère départage ce que l'espérance laissait à égalité.

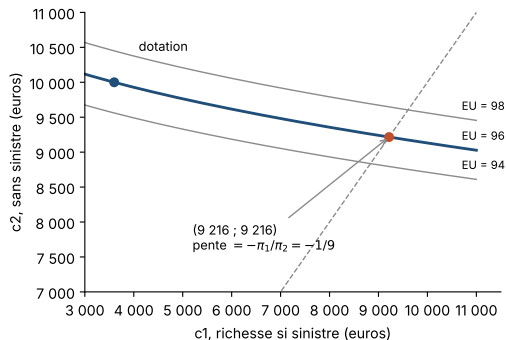
L'exemple de la Partie I

$$u(85\,000) = 291,55$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{100\,000} + \frac{1}{4}\sqrt{40\,000} = 287,17$$

Avec cette utilité, on préfère le montant certain.

Courbes d'indifférence et TMS



Le long d'une courbe, $0,1\sqrt{c_1} + 0,9\sqrt{c_2}$ est constant. Le TMS vaut

$$\text{TMS} = \frac{\pi_1 u'(c_1)}{\pi_2 u'(c_2)}.$$

- ▶ À la dotation, $\text{TMS} = 0,185$
- ▶ Sur la diagonale, $u'(c_1) = u'(c_2)$ et $\text{TMS} = \pi_1/\pi_2 = 1/9$

Sur la diagonale, la pente des courbes d'indifférence ne dépend que des probabilités.

Le choix optimal reste une tangence

Comme dans la Partie I, on choisit le meilleur plan accessible. À l'optimum intérieur, le TMS égale le prix relatif

$$\frac{\pi_1 u'(c_1)}{\pi_2 u'(c_2)} = \frac{\gamma}{1 - \gamma}.$$

- ▶ Ce que je suis prêt à céder dans l'état 2 pour un euro de plus dans l'état 1 égale ce que le marché de l'assurance me demande
- ▶ On peut ensuite faire varier γ , la richesse ou les probabilités, et observer comment la demande d'assurance réagit. C'est de la statique comparative

Ordinale ou cardinale ?

En Partie I, u était ordinale. Toute transformation croissante représentait les mêmes préférences. Ici, une seule famille préserve la forme d'utilité espérée, les transformations **affines positives** $v = a u + b$ avec $a > 0$.

	EU de la loterie d'Inès	utilité de 9 300 € certains	choix
$u = \sqrt{W}$	96,00	96,44	certain
$v = 2\sqrt{W} + 5$	197,00	197,87	certain
$w = (\sqrt{W})^4 = W^2$	91 296 000	86 490 000	loterie

w est une transformation croissante de u , mais pas affine. Elle change le classement des loteries. La courbure de u porte donc une information, que la séance VI exploitera.

Pourquoi une somme pondérée ?

Vous envisagez une assurance incendie. Vous vous souciez de votre richesse aujourd'hui c_0 , si la maison brûle c_1 , sinon c_2 .

Combien sacrifier aujourd'hui pour avoir un peu plus si la maison brûle ? La réponse ne devrait pas dépendre de c_2 . La maison brûlera ou non. Ce qui n'arrive pas ne devrait pas modifier la valeur de ce qui arrive.

Café, thé et crème

Entre café et thé, la quantité de crème compte, car on les consomme ensemble.

Si un dé décide si vous recevez café, thé *ou* crème, la crème ne devrait plus peser sur le choix entre café et thé. Vous n'aurez qu'un des trois.

Varian (2014), section 12.4. C'est une hypothèse sur les préférences, elle peut être violée.

L'hypothèse d'indépendance

Hypothèse d'indépendance

Les choix prévus dans un état de la nature ne dépendent pas de ce qui est prévu dans les autres états, puisque les consommations contingentes ne seront jamais consommées ensemble.

Elle impose une utilité additive entre les états, l'utilité espérée

$$U(c_1, c_2, c_3) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) + \pi_3 u(c_3).$$

Le TMS entre les états 1 et 2, $\text{TMS}_{12} = \pi_1 u'(c_1) / (\pi_2 u'(c_2))$, ne dépend alors pas de c_3 .

Varian (2014), section 12.4. Le résultat général relève du théorème de von Neumann et Morgenstern.

Inès compare sa situation, sans assurance, à 9 200 € certains.

1. Que choisit-elle si $u(W) = \sqrt{W}$?
2. Et si $u(W) = \ln W$?
3. Que vous apprend la comparaison ?

$\ln 3\,600 = 8,189$, $\ln 9\,200 = 9,127$, $\ln 10\,000 = 9,210$.

Avec $\sqrt{W}$

$$EU = 96 > \sqrt{9\,200} = 95,92$$

Elle garde le risque.

Avec $\ln W$

$$EU = 0,1 \times 8,189 + 0,9 \times 9,210 = 9,108$$

$$\ln 9\,200 = 9,127 > 9,108$$

Elle prend le montant certain.

Même loterie, mêmes probabilités, deux décisions. Ce qui les sépare est la forme de u . La séance VI montre que c'est sa *courbure* qui compte.

Choisir face au risque

- ▶ Une loterie est un plan de consommation contingente. Les outils de la Partie I s'appliquent, avec un bien par état de la nature
- ▶ Sous l'hypothèse d'indépendance, on choisit la loterie qui maximise $EU = \sum_s \pi_s u(W_s)$, définie à une transformation affine positive près
- ▶ À l'optimum, $\pi_1 u'(c_1)/(\pi_2 u'(c_2))$ égale le prix relatif des consommations contingentes

Travaux dirigés

Série d'exercices de la séance V

10 questions de quiz et 5 exercices

(support distinct)

Séance VI. Attitudes face au risque et réduction du risque

C. Attitudes face au risque

Inès attend 9 360 € en moyenne.

Quelle somme *certaine* lui serait exactement aussi agréable que sa situation risquée ?

Et que mesure l'écart entre les deux ?

Un emploi sûr ou un emploi risqué ?

Une salariée gagne 15 000 dollars par an, de façon certaine. Une offre de vente lui rapporterait 30 000 ou 10 000 dollars avec probabilité 1/2 chacun.

revenu (k\$)	10	15	20	30
utilité	10	13,5	16	18

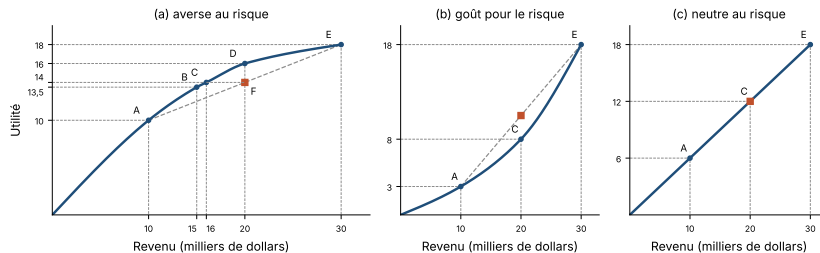
$$EU(\text{offre}) = \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{2} \times 18 = 14$$

$$u(15\,000) = 13,5 < 14$$

Elle accepte l'offre. Son revenu espéré est plus élevé, 20 000 dollars, et son utilité espérée aussi.

Mais si on lui proposait 20 000 dollars *certaines*, d'utilité 16, elle les préférerait à l'offre risquée, d'utilité espérée 14. Elle n'aime pas le risque, elle l'accepte quand il est assez rémunéré.

Trois attitudes face au risque



Averse (*risk averse*). Préfère un revenu certain à une loterie de même espérance.
 $EU = 14 < u(20) = 16$.

Goût pour le risque (*risk loving*). Préfère la loterie.
 $EU = 10,5 > u(20) = 8$.

Neutre (*risk neutral*). Indifférent. $EU = 12 = u(20)$.

Loterie 10 ou 30 milliers de dollars, probabilité 1/2. Carré orange, utilité espérée (point F).

La courbure mesure l'attitude

- ▶ u concave, utilité marginale décroissante, **aversion**
- ▶ u linéaire, utilité marginale constante, **neutralité**
- ▶ u convexe, utilité marginale croissante, **goût pour le risque**

Plus u est concave, plus l'aversion est forte.

Pour un agent averse, la corde passe sous la courbe

$$E[u(W)] < u(E[W]).$$

C'est l'inégalité de Jensen, vue en Partie I.

Avec la courbe (a), passer de 20 à 30 milliers rapporte 2 unités d'utilité, passer de 20 à 10 en coûte 6. Une perte pèse plus qu'un gain de même taille.

Équivalent certain et prime de risque

Définitions

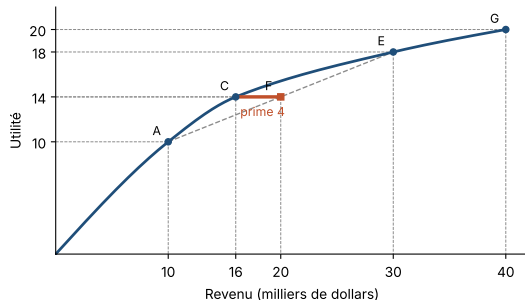
L'**équivalent certain** (*certainty equivalent*) EC d'une loterie est le revenu certain qui procure la même utilité qu'elle

$$u(\text{EC}) = E[u(W)].$$

La **prime de risque** (*risk premium*) est l'écart $\rho = E[W] - \text{EC}$.

- ▶ C'est la somme maximale qu'un agent averse accepterait de sacrifier, en espérance, pour échapper au risque
- ▶ $\rho > 0$ si l'agent est averse, $\rho = 0$ s'il est neutre, $\rho < 0$ s'il aime le risque

La prime de risque sur le graphique



Offre 10 ou 30 (k\$). EU = 14 (point F, milieu de la corde AE), atteint avec 16 000 dollars certains (point C).

$$\rho = 20\,000 - 16\,000 = 4\,000 \text{ dollars}$$

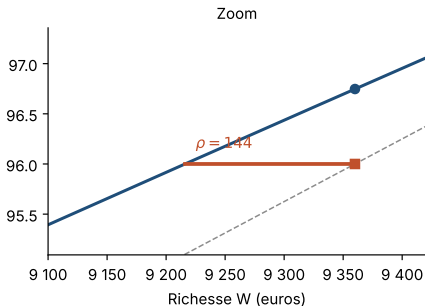
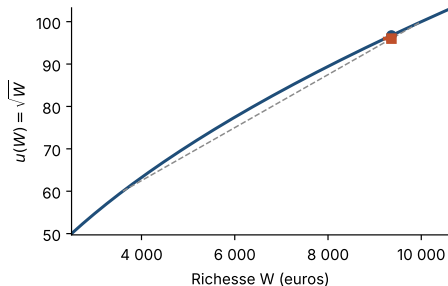
Offre 0 ou 40. Même espérance, 20 000 dollars.

$$EU = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 20 = 10 = u(10\,000).$$

$$\rho = 10\,000 \text{ dollars}$$

Plus la dispersion est grande, plus la prime est élevée.

La prime de risque d'Inès



$$EU = 96 \Rightarrow EC = 96^2 = 9216 \text{ €} \quad \rho = 9360 - 9216 = 144 \text{ €}$$

Inès accepterait de sacrifier jusqu'à 144 € de richesse espérée pour supprimer le risque.
Le zoom montre ce que la courbure produit sur un intervalle étroit.

Même loterie, $E[W] = 9\,360\text{ €}$, trois fonctions d'utilité.

	u	équivalent certain	prime de risque
averse	$\sqrt{W}$	9 216,0	144,0
neutre	W	9 360,0	0
goût pour le risque	W^2	9 554,9	-194,9

Pour la troisième, $EC = \sqrt{0,1 \times 3\,600^2 + 0,9 \times 10\,000^2}$. Elle exigerait qu'on la *paie* pour renoncer au risque.

Ce que paierait Inès pour une assurance complète

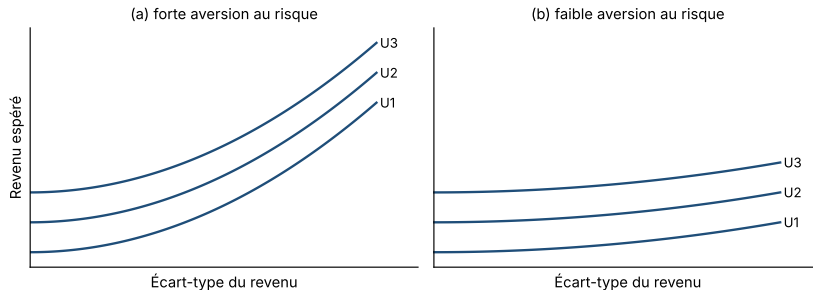
Une assurance complète lui garantit $10\,000 - P$ dans les deux états, contre une prime P . Elle l'accepte tant que $10\,000 - P \geq EC$.

$$P_{\max} = 10\,000 - 9\,216 = 784\text{€} = \underbrace{640}_{\text{perte espérée}} + \underbrace{144}_{\text{prime de risque}}$$

- ▶ Un agent neutre paierait au plus la perte espérée, 640 €
- ▶ L'aversion ajoute 144 €. C'est la marge dont dispose un assureur

Moment interactif. Pour quel montant certain renonceriez-vous à la loterie 100 000 ou 40 000 € ? Ce montant est *votre* équivalent certain.

Aversion au risque et courbes d'indifférence



Le risque est un mal. Les courbes sont croissantes et la satisfaction augmente vers le haut. En (a), un peu plus de risque exige beaucoup plus de revenu espéré. En (b), un faible supplément suffit.

Pindyck et Rubinfeld (2012), figure 5.5. Courbes de la forme $E = k + c\sigma^2$, tracées pour le cours.

► Code

Attitudes face au risque

- ▶ La courbure de u décrit l'attitude. Concave, aversion. Linéaire, neutralité. Convexe, goût pour le risque
- ▶ $u(EC) = E[u(W)]$ et $\rho = E[W] - EC$. La prime croît avec la dispersion et avec l'aversion
- ▶ Dans le plan (écart-type, espérance), les courbes d'indifférence d'un agent averse sont croissantes, d'autant plus pentues que l'aversion est forte

Séance VI. Attitudes face au risque et réduction du risque

D. Réduire le risque

Comment l'assureur peut-il être serein ?

L'assureur promet 6 400 € à Inès si elle a un accident.

Il ne sait pas plus qu'elle si l'accident aura lieu.

Pourquoi supporte-t-il ce risque mieux qu'elle ?

Trois façons de réduire le risque, diversifier, s'assurer, s'informer (Pindyck et Rubinfeld, 2012, section 5.3).

Vous vendez des appareils à la commission. L'été sera chaud ou froid, avec probabilité $1/2$.

revenu (dollars)	été chaud	été froid
climatiseurs seulement	30 000	12 000
radiateurs seulement	12 000	30 000
moitié de son temps à chacun	21 000	21 000

Spécialisé, revenu espéré 21 000 et écart-type 9 000. Diversifié, 21 000 certains.

Diversifier (*diversification*), c'est répartir ses ressources entre des activités dont les résultats ne sont pas étroitement liés.

Ce que la diversification doit à la corrélation

- ▶ Climatiseurs et radiateurs sont **corrélés négativement**, leurs ventes évoluent en sens opposés. Tout le risque disparaît
- ▶ Les cours des actions sont en partie **corrélés positivement**, une récession fait baisser la plupart d'entre eux. Diversifier réduit le risque sans l'annuler
- ▶ Sauf corrélation parfaitement positive, répartir réduit le risque

Deux activités de même loi, d'écart-type σ , de corrélation r . Une part w du temps à la première donne un revenu d'écart-type

$$\sigma \sqrt{w^2 + (1 - w)^2 + 2w(1 - w)r}, \quad \text{soit } 9\,000 \sqrt{\frac{1+r}{2}} \text{ pour } w = \frac{1}{2}.$$

Pindyck et Rubinfeld (2012), section 5.3. Varian (2014), section 12.6. La formule découle de $\text{Var}(wX + (1 - w)Y)$.

Simulateur 1, diversification et corrélation

La question. Que reste-t-il du risque quand on partage son temps entre deux activités plus ou moins liées ?

Ce qu'on règle

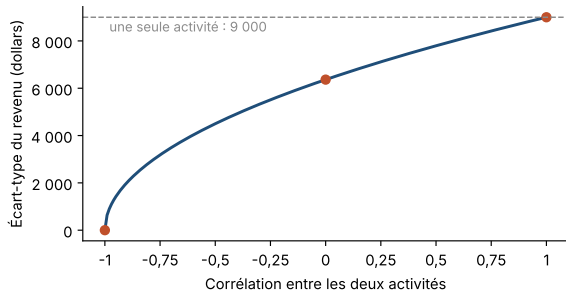
- ▶ la corrélation r entre les deux activités, de -1 à 1
- ▶ la part de temps donnée aux climatiseurs
- ▶ le nombre d'étés simulés

Ce qu'on observe

- ▶ l'écart-type empirique du revenu, comparé à la valeur théorique
- ▶ les revenus tirés été par été

Ouvrir le simulateur

Ce que montre le simulateur



r	écart-type
-1	0
-0,5	4 500
0	6 364
0,5	7 794
1	9 000

Avec $r = 0$, la diversification supprime déjà 29 % de l'écart-type.
Avec $r = 1$, elle ne sert à rien.

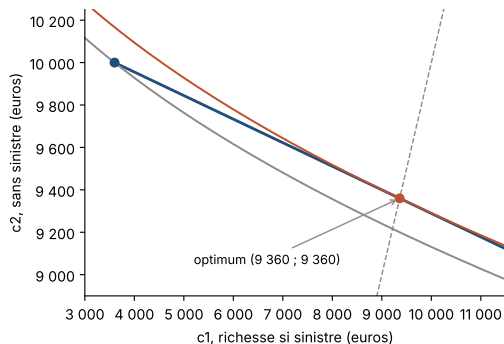
► Code

Un propriétaire possède 50 000 dollars. Avec probabilité 0,1, il est cambriolé et perd 10 000 dollars. L'assurance complète coûte 1 000 dollars.

	cambriolage (0,1)	sans cambriolage (0,9)	espérance	écart-type
sans assurance	40 000	50 000	49 000	3 000
avec assurance	49 000	49 000	49 000	0

Même richesse espérée, risque nul. Sans assurance, il gagne 1 000 dollars s'il n'est pas cambriolé et en perd 9 000 s'il l'est. Pour un agent averse, les pertes comptent plus que les gains. Il s'assure.

Inès face à une prime équitable



L'assureur gagne en espérance $\gamma K - \pi_1 K$.
Une prime **équitable** donne un profit
espéré nul, $\gamma = \pi_1 = 0,1$.

La condition de tangence devient

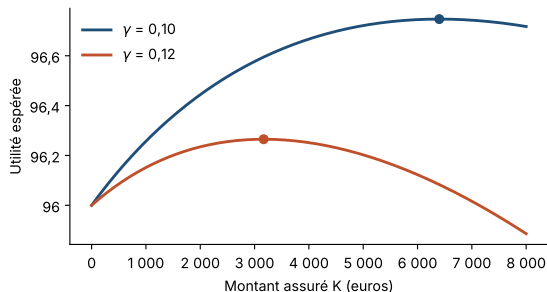
$$\frac{\pi_1 u'(c_1)}{\pi_2 u'(c_2)} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \Rightarrow u'(c_1) = u'(c_2).$$

u' étant décroissante, $c_1 = c_2$. Inès
s'assure complètement, $K = 6\,400$, et
passe de $EU = 96$ à $96,75$.

Varian (2014), section 12.5. Résultat général pour
tout agent averse qui maximise son utilité espérée.

► Code

Quand la prime est chargée



L'assureur couvre ses frais et sa marge, $\gamma = 0,12 > \pi_1$.

La tangence donne $c_2/c_1 = \left(\frac{0,9 \times 0,12}{0,1 \times 0,88}\right)^2$,
d'où

$$K^* = 3\,167 \text{ €}.$$

	EU
pas d'assurance	96,000
assurance complète	96,083
K^*	96,265

Une prime chargée pousse à ne s'assurer qu'en partie. Une couverture partielle, comme une franchise, peut donc être optimale sans aléa moral ni sélection adverse.

- ▶ On ne peut pas prévoir le résultat d'un lancer de pièce. Sur un grand nombre de lancers, on sait qu'environ la moitié donnera pile
- ▶ L'assureur ne sait pas *qui* aura un accident. Sur un grand nombre de conducteurs, il connaît bien la *proportion*

Mutualiser (*risk spreading*). N conducteurs comme Inès, aux risques indépendants, partagent leurs sinistres. Le coût par personne $\bar{C}_N$ vérifie

$$E[\bar{C}_N] = 640 \text{ €} \quad \sigma_{\bar{C}_N} = \frac{1\,920}{\sqrt{N}}.$$

Le coût moyen ne change pas, son risque s'évanouit quand N grandit.

Simulateur 2, la mutualisation

La question. À partir de combien d'assurés le coût par personne devient-il prévisible ?

Ce qu'on règle

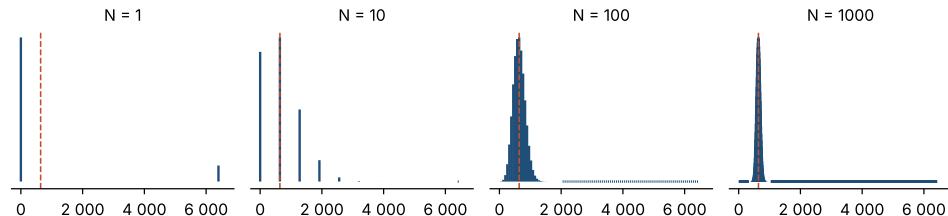
- ▶ le nombre d'assurés N
- ▶ la probabilité de sinistre et son montant (préréglage, Inès)
- ▶ le nombre d'années simulées

Ce qu'on observe

- ▶ l'histogramme du coût par assuré
- ▶ sa moyenne et son écart-type empiriques, comparés à 640 et $1\,920/\sqrt{N}$
- ▶ la fréquence des années où le coût dépasse 800 €

Ouvrir le simulateur

Ce que montre le simulateur



Coût moyen par assuré (euros)				
N	1	10	100	1 000
écart-type du coût par assuré	1 920	607	192	61
probabilité qu'il dépasse 800 €	0,100	0,264	0,198	0,005

Lois exactes, sans simulation. Avec un assuré, le coût vaut 0 ou 6 400. Avec mille, il reste entre 500 et 800 dans 98,6 % des cas.

[► Code](#)

Assurance actuariellement équitable

Une assurance est **actuariellement équitable** (*actuarially fair*) quand la prime égale le remboursement espéré.

- ▶ 100 propriétaires comme celui du cambriolage paient chacun 1 000 dollars. Le fonds de 100 000 dollars couvre presque sûrement les sinistres
- ▶ Les primes réelles dépassent un peu la perte espérée, pour couvrir les frais et le profit. La concurrence les rapproche du niveau équitable
- ▶ Certains risques ne se mutualisent pas. Un tremblement de terre touche tous les assurés à la fois. En Californie, l'État a dû remplacer les assureurs privés

Application, l'assurance de titre de propriété

Vous seriez prêt à payer 300 000 dollars une maison. Il y a une chance sur vingt que le vendeur n'en soit pas le véritable propriétaire, la maison ne vaudrait alors rien pour vous.

- ▶ Un acheteur neutre au risque offre au plus $0,95 \times 300\,000 = 285\,000$ dollars
- ▶ Un acheteur averse, qui y engage l'essentiel de son patrimoine, offre bien moins, par exemple 230 000
- ▶ Un assureur spécialisé vérifie l'historique du bien à faible coût et garantit le titre. Des frais de 1 500 dollars sont courants, pour une perte espérée de 15 000

Aux États-Unis, cette assurance est souvent obligatoire. En France, la vérification des titres de propriété relève du notaire.

La valeur de l'information

Un magasin commande des costumes vendus 300 dollars. 100 costumes coûtent 180 dollars pièce, 50 en coûtent 200. Les invendus sont repris pour la moitié de leur prix d'achat. Les ventes seront de 50 ou de 100, avec probabilité 1/2.

profit (dollars)	ventes de 50	ventes de 100	profit espéré
commander 50	5 000	5 000	5 000
commander 100	1 500	12 000	6 750

Informé à l'avance, on commande juste dans chaque cas, $\frac{1}{2} \times 5\,000 + \frac{1}{2} \times 12\,000 = 8\,500$.

La **valeur de l'information complète** est l'écart entre ce profit espéré et celui obtenu sans information, $8\,500 - 6\,750 = 1\,750$ dollars.

Réduire le risque

- ▶ Diversifier réduit le risque tant que les activités ne sont pas parfaitement corrélées positivement. Une corrélation négative peut l'annuler
- ▶ Un agent averse qui maximise son utilité espérée s'assure complètement si la prime est actuariellement équitable, en partie seulement si elle est chargée
- ▶ La loi des grands nombres rend le coût moyen d'un groupe d'assurés indépendants prévisible. Une information vaut l'écart de gain espéré qu'elle permet

Travaux dirigés

Série d'exercices de la séance VI

10 questions de quiz et 5 exercices

(support distinct)

Séance VII. Actifs risqués

E. La demande d'actifs risqués

Pourquoi acheter des actions ?

La plupart des gens n'aiment pas le risque.
Beaucoup placent pourtant une partie de leur épargne en
actions.

Pourquoi, et combien ?

Actifs risqués et actif sans risque

- ▶ Un **actif** (*asset*) procure un flux d'argent ou de services à son propriétaire. Un logement, un livret, une action
- ▶ Le flux peut être explicite (loyer, intérêt, dividende) ou implicite, une *plus-value* ou une *moins-value* (*capital gain, loss*)
- ▶ Un **actif risqué** a un flux en partie aléatoire. Une action, un immeuble de rapport, une obligation d'entreprise, même une obligation d'État à 20 ans à cause de l'inflation
- ▶ Un **actif sans risque** a un flux connu avec certitude

Les *Treasury bills* américains, titres de l'État à quelques mois, sont presque sans risque. En France, leur équivalent est le bon du Trésor à taux fixe (BTF), d'échéance inférieure à un an.

Le rendement d'un actif

Rendement

Le **rendement** (*return*) d'un actif est son flux total, plus-values comprises, rapporté à son prix. Le **rendement réel** est le rendement nominal moins l'inflation.

	prix initial	prix final	flux	rendement
obligation	1 000	1 000	100	10 %
immeuble (millions)	10	11	0,5	15 %
action General Motors	80	72	4	−5 %

Avec 5 % d'inflation, rendements réels de 5 %, 10 % et −10 %. Le rendement *espéré* est ce qu'un actif rapporte en moyenne, le rendement *effectif* ce qu'il a rapporté.

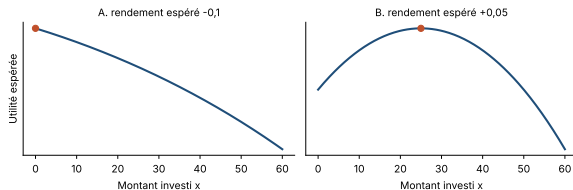
Rendement et risque, 1926 à 2010

	rendement moyen	rendement réel	écart-type
actions (S&P 500)	11,9	8,7	20,4
obligations d'entreprise	6,2	3,3	8,3
bons du Trésor américains	3,7	0,7	3,1

- Plus le rendement moyen est élevé, plus le risque l'est. Les actions rapportent 8 points de rendement réel de plus que les bons du Trésor
- Pourquoi acheter des bons du Trésor ? Parce que la demande d'un actif dépend de son rendement *et* de son risque

En %. Le S&P 500 regroupe 500 grandes sociétés américaines, comme le CAC 40 pour 40 grandes sociétés françaises.

Le premier euro placé



Richesse w , montant x placé,
rendement r_g ou r_b

$$EU(x) = \pi u(w + xr_g) + (1 - \pi) u(w + xr_b)$$

$$EU'(0) = u'(w) [\pi r_g + (1 - \pi) r_b].$$

Le signe ne dépend que du
rendement espéré. S'il est positif, tout
agent averse place *un peu*, si averse
soit-il.

$w = 100$, $u = \ln$, $\pi = 1/2$. A, $r_g = 0,3$ et $r_b = -0,5$, $x^* = 0$. B, $r_g = 0,5$ et $r_b = -0,4$,
 $x^* = 25$.

Résumer un placement par deux nombres

Plutôt que toute la loterie, on retient son espérance μ et son écart-type σ . L'utilité s'écrit $u(\mu, \sigma)$.

- ▶ Exacte si les loteries comparées ne diffèrent que par ces deux nombres, bonne approximation sinon
- ▶ μ est un bien, σ un mal. C'est une façon de dire que l'agent est averse au risque
- ▶ C'est le plan (écart-type, revenu espéré) de la séance VI, appliqué aux rendements

Un portefeuille à deux actifs

Une part x de l'épargne va à l'actif risqué (rendement aléatoire $\tilde{r}_m$, d'espérance r_m , d'écart-type σ_m), le reste à l'actif sûr (r_f).

$$r_x = x r_m + (1 - x) r_f$$

$$\sigma_x^2 = E[(x\tilde{r}_m - x r_m)^2] = x^2 \sigma_m^2$$

$$\sigma_x = x \sigma_m$$

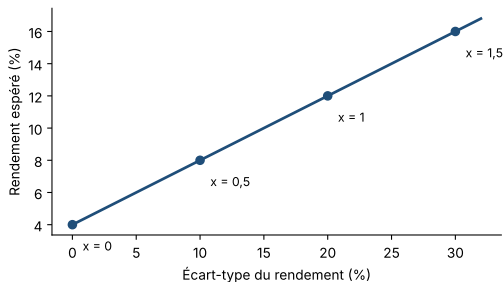
Exemple. $r_f = 4\%$, $r_m = 12\%$, $x = 1/2$

$$r_x = 8\%$$

Si $\sigma_m = 20\%$, $\sigma_x = 10\%$.

$\sigma_m = 20\%$ est notre hypothèse, proche de l'écart-type des actions dans le tableau précédent.

La droite budgétaire risque et rendement



En remplaçant $x = \sigma_x / \sigma_m$,

$$r_x = r_f + \underbrace{\frac{r_m - r_f}{\sigma_m}}_p \sigma_x.$$

La pente p est le **prix du risque** (*price of risk*), le rendement espéré supplémentaire obtenu par point d'écart-type accepté. Ici $p = 8/20 = 0,4$.

- ▶ Les courbes d'indifférence sont croissantes, puisque le risque est un mal
- ▶ L'investisseur atteint la plus haute courbe accessible. À l'optimum, la courbe est tangente à la droite

$$\text{TMS} = -\frac{\Delta U / \Delta \sigma}{\Delta U / \Delta \mu} = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m} = p.$$

- ▶ Ce qu'il exige pour un point de risque en plus égale ce que le marché lui offre

Une utilité moyenne-variance simple

Prenons $U = \mu - \frac{a}{2} \sigma^2$, où $a > 0$ mesure l'aversion au risque. Sur la droite budgétaire, $U(x) = r_f + x(r_m - r_f) - \frac{a}{2} x^2 \sigma_m^2$. La condition du premier ordre donne

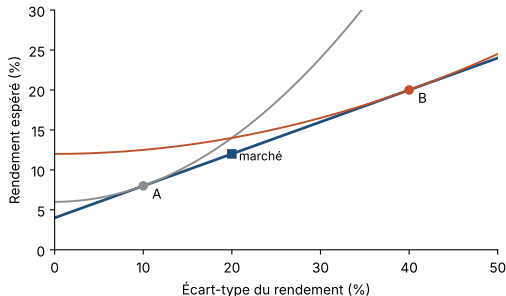
$$U'(x) = (r_m - r_f) - a x \sigma_m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{r_m - r_f}{a \sigma_m^2}.$$

Avec les chiffres précédents, $x^* = 0,08 / (a \times 0,04) = 2/a$. On place davantage en actif risqué si son rendement espéré monte, si son risque baisse ou si l'on est moins averse.

Forme fonctionnelle choisie pour le cours. Les livres raisonnent sur des courbes générales.

► Code

Deux investisseurs



A, très averse, $a = 4$. $x^* = 0,5$, rendement 8 %, écart-type 10 %.

B, peu averse, $a = 1$. $x^* = 2$. Elle veut placer 200 % de sa richesse en actions. Elle emprunte pour cela à son courtier, c'est l'**achat sur marge** (*buying on margin*). Rendement espéré 20 %, écart-type 40 %.

L'effet de levier élève le rendement espéré au-delà de celui du marché, au prix d'un risque accru.

Simulateur 3, le choix de portefeuille

La question. Comment la part placée en actions dépend-elle de l'aversion au risque, et que vit-on année après année ?

Ce qu'on règle

- ▶ r_f , r_m , σ_m
- ▶ l'aversion au risque a
- ▶ le nombre d'années simulées

Ce qu'on observe

- ▶ la droite budgétaire et le point choisi
- ▶ x^* , r_x et σ_x théoriques
- ▶ la moyenne et l'écart-type des rendements simulés

Ouvrir le simulateur

Ce que montre le simulateur

- ▶ Avec $a = 4$, la moyenne des rendements simulés se rapproche de 8 % et leur écart-type de 10 % quand le nombre d'années augmente
- ▶ Avec $a = 1$, la moyenne approche 20 %, mais certaines années, environ une sur quinze si les rendements suivent une loi normale, la perte dépasse 40 % du capital
- ▶ Diviser a par deux double x^* , donc le rendement excédentaire espéré *et* l'écart-type

Un rendement espéré élevé n'est pas un rendement garanti. Sur une courte période, l'investisseur B peut perdre beaucoup.

Quel actif risqué combiner avec l'actif sûr ?

Deux fonds risqués, X ($r = 8\%$, $\sigma = 10\%$) et Y ($r = 14\%$, $\sigma = 20\%$), avec $r_f = 4\%$ et $a = 5$.

	prix du risque	U , tout dans le fonds	x^*	U , meilleur mélange
X	0,40	0,0550	0,80	0,0560
Y	0,50	0,0400	0,50	0,0650

Contraint de tout placer dans un fonds, l'investisseur choisit X . S'il peut le mélanger à l'actif sûr, il choisit Y . La droite de Y est plus pentue et contient toutes les combinaisons accessibles avec X .

La demande d'actifs risqués

- ▶ En combinant actif sûr et actif risqué, $r_x = r_f + p \sigma_x$ avec $p = (r_m - r_f)/\sigma_m$, le prix du risque
- ▶ À l'optimum, le TMS entre risque et rendement égale p . Avec $U = \mu - \frac{a}{2}\sigma^2$,
 $x^* = (r_m - r_f)/(a\sigma_m^2)$
- ▶ Les moins averses placent davantage en actifs risqués, au-delà de 100 % en achetant sur marge

Séance VII. Actifs risqués

F. L'équilibre des marchés d'actifs risqués

Une action dont le cours varie énormément doit-elle rapporter beaucoup en moyenne ?

- ▶ Avec un seul actif risqué, son écart-type mesure bien son risque
- ▶ Avec de nombreux actifs, ce qui compte est l'effet de cet actif sur le risque du portefeuille entier

- ▶ Chaque investisseur égalise son TMS entre risque et rendement au prix du risque p
- ▶ Tous font face au même p . À l'équilibre, tous les TMS sont donc égaux
- ▶ Le risque s'échange comme un bien. Ceux qui l'acceptent mieux en portent davantage et sont rémunérés pour cela

Le risque d'un actif dépend des autres

Deux états équiprobables. L'actif A vaut 10 ou -5 dollars, l'actif B vaut -5 ou 10, en sens inverse.

	état 1	état 2	valeur espérée
A	10	-5	2,50
B	-5	10	2,50
A et B	5	5	5

Seul, chaque actif vaut au plus 2,50 dollars pour un agent neutre, moins pour un agent averse. Ensemble, ils procurent 5 dollars certains. Un actif qui varie à contre-courant des autres *réduit* le risque total et vaut cher.

Bêta

Le **bêta** (*beta*) d'un actif i mesure son risque relativement à celui du marché dans son ensemble

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_m)}{\text{Var}(\tilde{r}_m)}.$$

- ▶ $\beta_i = 1$, l'actif est aussi risqué que le marché. Si le marché monte de 10 %, il monte en moyenne de 10 %
- ▶ $\beta_i < 1$, il suit moins les mouvements du marché. $\beta_i > 1$, il les amplifie

Quatre états de l'économie, équiprobables. Rendements en %.

	récession	stagnation	reprise	essor	moyenne	écart-type	bêta
marché	-10	0	10	20	5	11,18	1
D, eau	-2	-1	4	13	3,5	5,94	0,5
C, automobile	-13	-4	11	32	6,5	17,04	1,5
Z, réassurance	12	-8	-8	12	2	10,00	0

Z varie presque autant que le marché, mais indépendamment de lui. Son bêta est nul. Ajouté à un portefeuille diversifié, il n'en augmente pas le risque.

Le prix d'un risque

Le risque total de l'actif i vaut $\beta_i \sigma_m$. Son coût, l'**ajustement pour le risque**, est ce risque multiplié par le prix du risque

$$\beta_i \sigma_m \times \frac{r_m - r_f}{\sigma_m} = \beta_i (r_m - r_f).$$

Condition d'équilibre

À l'équilibre, tous les actifs offrent le même rendement ajusté pour le risque

$$r_i - \beta_i (r_m - r_f) = r_j - \beta_j (r_m - r_f).$$

Sinon, chacun voudrait l'actif au meilleur rendement ajusté. Varian (2014), section 13.4.

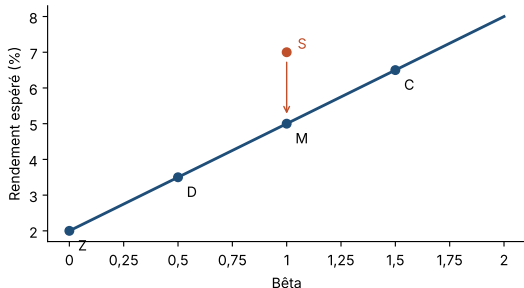
La droite de marché

L'actif sans risque a un bêta nul, d'où

$$r_i = r_f + \beta_i (r_m - r_f).$$

C'est la **droite de marché** (*market line*), résultat central du modèle d'évaluation des actifs financiers, le MEDAF (*CAPM*).

Avec $r_f = 2\%$ et $r_m = 5\%$, D doit rapporter 3,5% et C 6,5%. Z, malgré sa volatilité, 2% comme l'actif sûr.



Varian (2014), section 13.4 et figure 13.4.

[► Code](#)

Comment les rendements s'ajustent

Le rendement espéré d'une action est $r_i = E[(p_1 - p_0)/p_0]$, où p_0 est le prix d'aujourd'hui.

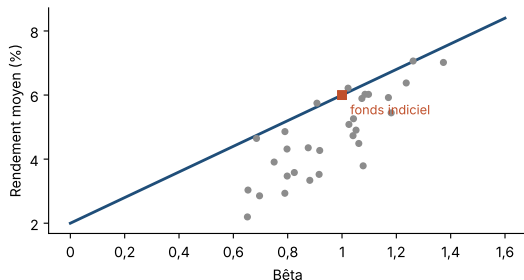
Exemple. L'action S a un bêta de 1 et devrait valoir 107 € dans un an.

- ▶ Rendement requis $2\% + 1 \times 3\% = 5\%$
- ▶ Au prix de 100 €, elle rapporte 7 % en espérance. Elle est au-dessus de la droite, c'est une bonne affaire
- ▶ Les acheteurs affluent et font monter p_0 , ce qui fait baisser le rendement espéré
- ▶ L'ajustement s'arrête à $p_0 = 107/1,05 = 101,90$ €, sur la droite

Varian (2014), section 13.5. Le raisonnement suppose que tous s'accordent sur les rendements espérés et les bêtas.

▶ Code

Fonds gérés et fonds indiciel



Un **fonds indiciel** (*index fund*) détient les actions d'un indice. Son bêta est proche de 1 et ses frais sont faibles. En le combinant avec l'actif sûr, on obtient tout point de la droite.

Varian rapporte que la grande majorité des fonds gérés se trouvent sous cette droite, pas plus au-dessus que ne le voudrait le hasard. Battre un marché très concurrentiel est presque impossible.

- ▶ Le fondateur d'une entreprise a toute sa richesse dans un seul actif. En vendant des actions, il répartit ce risque sur de nombreux actionnaires
- ▶ Un actionnaire qui trouve la politique d'une société trop risquée, ou pas assez, vend ses titres et en achète d'autres
- ▶ En assurance automobile ou habitation, il n'y a presque pas de risque agrégé. On ne sait pas *qui* aura un sinistre, mais on sait *combien* en auront un
- ▶ La bourse porte un risque agrégé, certaines années tout baisse. Quelqu'un doit le supporter. Le marché le transfère à ceux qui l'acceptent contre une rémunération, le prix du risque

L'équilibre des actifs risqués

- ▶ Le risque d'un actif se mesure par sa contribution au risque du marché, son bêta, et non par son écart-type
- ▶ À l'équilibre, $r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f)$. Un actif au-dessus de la droite de marché voit son prix monter jusqu'à la rejoindre
- ▶ Le marché boursier répartit le risque agrégé entre ceux qui acceptent de le porter

Travaux dirigés

Série d'exercices de la séance VII

10 questions de quiz et 5 exercices

(support distinct)

Séance VIII. Quand le modèle standard ne suffit pas

G. Bulles et économie comportementale

Le cours d'une action passe de 20 à 30 dollars.
Vos amis viennent d'en acheter.

Achetez-vous ? Est-ce irrationnel ?

Bulle

Une **bulle** (*bubble*) est une hausse du prix d'un bien qui ne repose pas sur ses fondamentaux, demande ou rentabilité future, mais sur la croyance que le prix continuera de monter.

- ▶ Entre 1995 et 2000, les actions des sociétés internet s'envolent. Internet change bien la vie, mais toute société en « .com » ne sera pas rentable
- ▶ Les acheteurs se disent qu'ils vendront avant la baisse. La plupart vendent après, et perdent une partie de leur mise
- ▶ La demande devient spéculative. On achète pour revendre plus cher, pas pour l'usage du bien

L'indice S&P/Case-Shiller suit les reventes successives des mêmes maisons.

- ▶ De 1987 à 1998, il progresse d'environ 3 % par an en termes nominaux, au rythme de la population, des revenus et de l'inflation
- ▶ De 1998 à 2006, d'environ 10 % par an, jusqu'à un pic de 190. Des banques prêtent à des ménages qui ne pourront pas rembourser
- ▶ Du pic de 2006 à 2011, les prix baissent de plus de 33 % en termes nominaux, près de 40 % en termes réels, plus de 50 % en Floride, en Arizona et au Nevada
- ▶ L'Irlande connaît le même scénario, +305 % de 1995 à 2007, puis -28 % en 2010

Une bulle n'est pas toujours sans conséquence. Celle-ci a contribué à la crise de 2008.

Les cascades informationnelles

L'action Ajax, une biotech difficile à évaluer, cote 20 dollars. Elle passe à 21, 22, 25. Des amis achètent à 25. À 30, vous achetez. D'autres savent sans doute quelque chose.

- ▶ Vous ne décidez pas sur une information fondamentale, mais sur les *décisions* des autres
- ▶ Vous supposez qu'elles reposent sur de l'information, ou sur les décisions d'autres encore, qui reposent sur de l'information, et ainsi de suite
- ▶ Au bout de la chaîne, l'information peut être aussi faible que la vôtre

Une **cascade informationnelle** (*informational cascade*) est une évaluation fondée sur les actions d'autres personnes, elles-mêmes fondées sur les actions d'autres encore. Suivre la foule peut être rationnel, mais le risque est grand et souvent sous-estimé.

Un modèle simple

Deux choix, A et B. A est le bon, personne ne le sait. On choisit l'un après l'autre.

- ▶ Chacun reçoit un signal privé, juste avec probabilité $q > 1/2$, et observe les choix précédents
- ▶ Tant que les choix précédents sont équilibrés à un près, chacun suit son signal. Son choix le révèle
- ▶ Dès qu'un choix a deux voix d'avance, le suivant imite, quel que soit son signal. Plus rien n'est révélé

Deux signaux faux à la suite lancent une cascade erronée, deux justes une cascade correcte

$$\Pr(\text{cascade erronée}) = \frac{(1 - q)^2}{q^2 + (1 - q)^2}.$$

Avec $q = 0,7$, elle vaut 0,155. Environ une file sur six finit sur le mauvais choix.

Modèle construit pour le cours. Pindyck et Rubinfeld renvoient à Bikhchandani, Hirshleifer et Welch (1998).

▶ Code

Simulateur 4, la cascade informationnelle

La question. Combien de files d'attente finissent-elles sur le mauvais choix, alors que chacun raisonne correctement ?

Ce qu'on règle

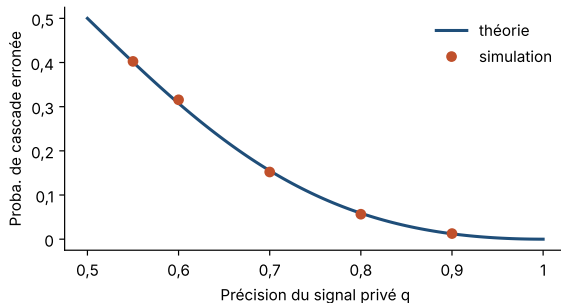
- ▶ la précision q du signal privé
- ▶ le nombre de personnes par file
- ▶ le nombre de files simulées

Ce qu'on observe

- ▶ une file personne par personne, signal et choix
- ▶ la fréquence des cascades erronées, comparée à la formule

Ouvrir le simulateur

Ce que montre le simulateur



10 000 files de 20 personnes pour chaque q . Les fréquences simulées suivent la formule.

Même avec $q = 0,8$, environ 6 files sur 100 se trompent. Les vingt personnes y choisissent B, quelle que soit l'information dispersée parmi elles.

L'imitation est rationnelle pour chacun, mais elle gaspille l'information de tous.

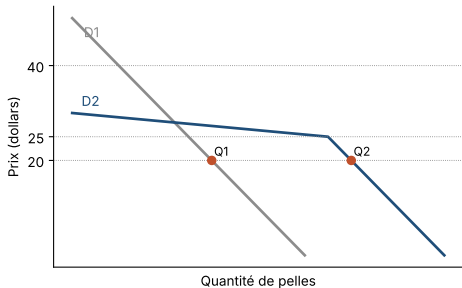
► Code

Le point de référence

Selon le modèle standard, chacun attribue une valeur unique à un bien. En pratique, cette valeur dépend en partie d'un **point de référence** (*reference point*).

- ▶ En 2006, un deux-pièces se loue environ 650 dollars par mois à Pittsburgh, 2 125 à San Francisco. Pour un habitant de Pittsburgh qui déménage, San Francisco semble injustement cher
- ▶ **Effet de dotation** (*endowment effect*). On valorise davantage un bien que l'on possède. Des étudiants à qui l'on donne une tasse de 5 dollars en demandent 7 pour la revendre. Ceux qui n'en ont pas acceptent 3,50 dollars à la place de la tasse

- ▶ **Aversion aux pertes** (*loss aversion*). On préfère éviter une perte plutôt qu'obtenir un gain de même taille. On hésite à vendre une action en dessous de son prix d'achat, qui sert de référence
- ▶ Les propriétaires qui vendent leur maison fixent souvent un prix bien au-dessus du marché, surtout s'ils l'ont achetée près du sommet de la bulle. Les maisons restent plus longtemps en vente quand les prix baissent
- ▶ Ces effets s'atténuent avec l'expérience du marché
- ▶ **Cadrage** (*framing*). La façon dont un choix est présenté pèse sur la décision. Une crème qui « ralentit le vieillissement » ou qui « rend la jeunesse »



Une pelle à neige coûte d'habitude 20 dollars. Après une tempête, la demande passe de D1 à D2. Une hausse à 25 dollars semble juste, au-delà c'est du profit abusif. D2 devient très élastique au-dessus de 25 dollars et rien ne se vend au-dessus de 30.

Jeu de l'ultimatum. Vous proposez un partage de 100 billets de 1 dollar. Si l'autre refuse, personne n'a rien. La théorie prévoit 99 et 1, accepté. En expérience, les offres vont de 67/33 à 50/50, et les offres très inégales sont souvent refusées.

Ancrage et règles empiriques

- ▶ **Ancrage** (*anchoring*). Une association demande de choisir entre 20, 50, 100 ou 250 dollars. Qui aurait donné 44,52 donne 50, qui voulait donner 10 en donne 20. Pour beaucoup, 19,95 dollars paraît bien moins cher que 20,01
- ▶ **Règles empiriques** (*rules of thumb*). Beaucoup d'acheteurs en ligne ignorent les frais de livraison. Ces raccourcis font gagner du temps au prix de petits biais
- ▶ **Loi des petits nombres** (*law of small numbers*). On surestime certaines probabilités à partir de peu d'observations récentes. Le joueur de roulette qui mise sur le noir après trois rouges, l'investisseur qui croit que les bonnes années vont continuer

Les chauffeurs de taxi new-yorkais

Les chauffeurs louent leur taxi 76 dollars par jour et paient environ 15 dollars d'essence. Un jour chargé, une heure de plus peut rapporter 20 dollars, un jour creux 10. Le modèle standard d'offre de travail prédit qu'ils travaillent plus les jours chargés.

- ▶ Les relevés de courses du printemps 1994 montrent l'inverse. Ils s'arrêtent plus tôt les jours où le gain horaire est élevé, comme s'ils visaient un revenu quotidien d'environ 150 dollars, leur point de référence
- ▶ Une autre étude trouve que l'arrêt dépend surtout des heures déjà travaillées. Une troisième fait mieux encore avec des points de référence pour le revenu *et* les heures

Le débat n'est pas tranché. C'est l'offre de travail de la Partie I, avec un point de référence en plus.

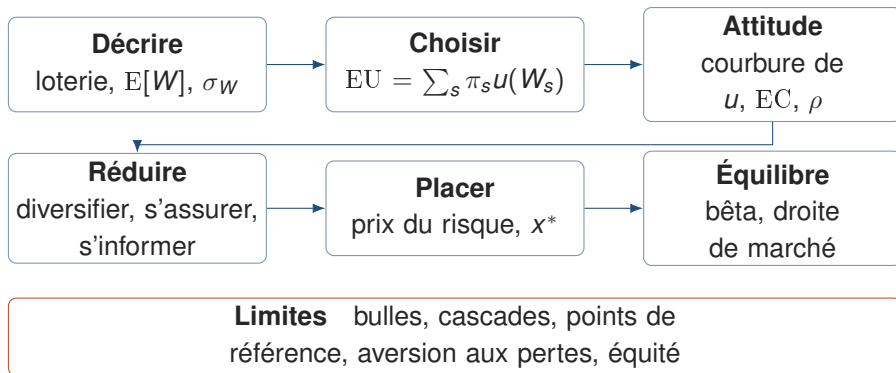
Bulles et économie comportementale

- ▶ Une bulle est une hausse de prix fondée sur l'anticipation de la hausse, pas sur les fondamentaux. Les cascades informationnelles peuvent la nourrir, même avec des individus rationnels
- ▶ Points de référence, aversion aux pertes, cadrage, équité et ancrage expliquent des choix que le modèle standard prévoit mal
- ▶ Le modèle standard reste la référence. L'économie comportementale l'enrichit là où il décrit mal les choix observés

Séance VIII. Quand le modèle standard ne suffit pas

Bilan de la partie

La Partie III en une slide



Le risque a un coût, même quand l'espérance ne change pas. Les marchés de l'assurance et des actifs permettent de l'échanger.

Ce que nous avons supposé

- ▶ L'assureur connaît la probabilité d'accident d'Inès aussi bien qu'elle
- ▶ Une fois assurée, Inès conduit aussi prudemment qu'avant

Et si ce n'était pas le cas ?

- ▶ Inès connaît sa prudence, l'assureur non. Sélection adverse
- ▶ L'assurance complète réduit son intérêt à la prudence. Aléa moral

L'incertitude n'est plus partagée de la même façon par tous. C'est l'objet de la Partie IV, l'information asymétrique. Les outils de cette partie, utilité espérée, prime de risque, contrat d'assurance, y serviront directement.

Travaux dirigés

Série d'exercices de la séance VIII

10 questions de quiz et 5 exercices

(support distinct)

Annexes

Exemples alternatifs

Exemple alternatif, une action de biotechnologie

Une société lyonnaise de biotechnologie (fictive) est cotée 50 €. Si son essai clinique réussit, l'action vaudra 80 €, sinon 35 €.

- ▶ Si, sur 100 essais comparables, 30 ont réussi, la probabilité de succès 0,3 est **objective**
- ▶ Si la molécule est la première de son genre, 0,3 n'est qu'un jugement, une probabilité **subjective**. Un chercheur du domaine peut en retenir une autre

$$E[\text{cours}] = 0,3 \times 80 + 0,7 \times 35 = 48,5 \text{ €}$$

Un investisseur neutre au risque n'achèterait pas à 50 €.

Exemple alternatif, deux emplois étudiants

	issue 1		issue 2		espérance	écart-type
	proba.	revenu	proba.	revenu		
A, vente à la commission	0,5	1 800	0,5	1 000	1 400	400
B, fixe sauf fermeture	0,9	1 500	0,1	500	1 400	300

- ▶ A, écarts ± 400 , variance $0,5 \times 400^2 + 0,5 \times 400^2 = 160\,000$
- ▶ B, écarts $+100$ et -900 , variance $0,9 \times 100^2 + 0,1 \times 900^2 = 90\,000$
- ▶ Si A rapporte 100 € de plus dans chaque issue, espérance 1 500, écart-type inchangé, 400. Le choix dépend alors de la personne

Exemple alternatif, la fraude dans les transports

Frauder dans un réseau de transport fait économiser un trajet de 2 €.

probabilité de contrôle	amende	amende espérée
0,05	30	1,50
0,05	50	2,50
0,02	50	1,00
0,02	120	2,40

Un usager neutre au risque fraude si l'amende espérée est inférieure à 2 €. Avec des contrôles deux fois et demie plus rares, il faut une amende au moins deux fois et demie plus forte. Un usager averse au risque est dissuadé plus tôt.

Exemple alternatif, un jeu à gratter

Inès a 50 €. Un ticket à gratter coûte 2 € et rapporte 100 € s'il est gagnant.

	ticket gagnant	ticket perdant
sans ticket	50	50
avec ticket	148	48

Le ticket déplace 2 € de l'état « perdant » vers l'état « gagnant », où ils deviennent 98 € de plus. Le point (50 ; 50) est sur la diagonale, le point (148 ; 48) très loin d'elle.

Exemple alternatif, le pari de Varian

Un consommateur a 10 dollars et se voit proposer un pari, gagner ou perdre 5 dollars avec probabilité $1/2$. Sa richesse sera 5 ou 15, d'espérance 10.

Varian trace une utilité concave quelconque. Prenons $u(W) = \sqrt{W}$.

$$EU = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{15} = 3,055 < u(10) = 3,162$$

Il est averse et refuse le pari. $EC = 3,055^2 = 9,33$ dollars, $\rho = 0,67$ dollar.

Avec $u(W) = W^2$, convexe, $EU = \frac{1}{2}(25 + 225) = 125 > u(10) = 100$. Il aime le risque et accepte.

Exemple alternatif, un CDD ou une mission en indépendant

Un CDD rapporte 2 000 € par mois, de façon certaine. Une mission en indépendant rapporte 1 000 ou 3 000 € avec probabilité 1/2. Avec $u(W) = \sqrt{W}$

$$EU = \frac{1}{2}\sqrt{1\,000} + \frac{1}{2}\sqrt{3\,000} = 43,20 \quad EC = 43,20^2 = 1\,866 \text{ €} \quad \rho = 134 \text{ €}.$$

Une mission plus risquée, 0 ou 4 000 €, a la même espérance

$$EU = \frac{1}{2}\sqrt{4\,000} = 31,62 \quad EC = 1\,000 \text{ €} \quad \rho = 1\,000 \text{ €}.$$

La prime de risque est multipliée par plus de sept quand la dispersion double.

Exemple alternatif, lunettes de soleil et imperméables

Vous placez 100 dollars. Les actions d'un fabricant d'imperméables et d'un fabricant de lunettes de soleil valent 10 dollars. L'été sera pluvieux ou ensoleillé, avec probabilité $1/2$.

	été pluvieux	été ensoleillé
tout en imperméables	200	50
tout en lunettes	50	200
moitié-moitié	125	125

Chaque action vaut 20 dollars dans l'état qui la favorise, 5 dans l'autre. Même espérance, 125 dollars, mais certaine en se diversifiant. Les deux actifs sont parfaitement corrélés négativement, ce qui est rare.

Exemple alternatif, l'assurance selon Varian

Un ménage possède 35 000 dollars et peut perdre 10 000 dollars avec probabilité 0,01. Un contrat paie 100 dollars de remboursement pour 1 dollar de prime.

- ▶ Sans assurance, 25 000 ou 35 000, d'espérance 34 900
- ▶ En assurant 10 000 dollars, la prime est de 100 dollars et la richesse vaut 34 900 dans les deux états

Mutualiser. Mille ménages semblables, aux risques indépendants, subissent en moyenne 10 sinistres par an. Chacun verse 10 dollars par sinistre, soit 100 dollars par an en moyenne. Verser 100 dollars chaque année et constituer une réserve pour les mauvaises années, c'est créer une mutuelle d'assurance.

Exemple alternatif, un scooter d'occasion

Inès achète un scooter d'occasion à un particulier, 3 000 €. Il y a une chance sur vingt qu'il soit gagé ou frappé d'opposition. Il pourrait alors lui être repris et ne vaudrait rien pour elle.

- ▶ Neutre au risque, elle offrirait au plus $0,95 \times 3\,000 = 2\,850$ €
- ▶ Averse, elle offrirait moins
- ▶ En France, le certificat de situation administrative, à demander au vendeur, indique si le véhicule est gagé ou frappé d'opposition. Une information peu coûteuse supprime presque tout le risque

Exemple alternatif, le glacier de la plage

Un glacier commande pour la journée. 400 glaces lui coûtent 1 € pièce, 200 en coûtent 1,20 €. Il les vend 3 €. Les invendus sont revendus 0,40 €. Il vendra 200 ou 400 glaces selon la météo, avec probabilité 1/2.

profit (euros)	demande de 200	demande de 400	espérance
commander 200	360	360	360
commander 400	280	800	540

Avec une prévision parfaite, $\frac{1}{2} \times 360 + \frac{1}{2} \times 800 = 580$. L'information vaut $580 - 540 = 40$ € par jour.

Exemple alternatif, trois placements

	prix initial	prix final	flux	rendement
livret d'épargne	1 000	1 000	30	3 %
appartement à Lille	200 000	206 000	8 000	7 %
action	40	36	1,20	−7 %

Le flux est l'intérêt, le loyer net ou le dividende. Avec 2 % d'inflation, les rendements réels sont 1 %, 5 % et −9 %.

Exemple alternatif, livret et fonds indiciel

Un livret rapporte $r_f = 3\%$. Un fonds indiciel d'actions a un rendement espéré $r_m = 8\%$ et un écart-type $\sigma_m = 15\%$.

$$p = \frac{8 - 3}{15} = \frac{1}{3} \quad x = 0,4 \Rightarrow r_x = 5\%, \sigma_x = 6\%$$

Avec $U = \mu - \frac{a}{2}\sigma^2$,

$$x^* = \frac{0,05}{a \times 0,0225}$$

- ▶ $a = 5$, $x^* = 0,44$
- ▶ $a = 2$, $x^* = 1,11$, l'épargnant emprunte pour placer 111 % de son épargne

Exemple alternatif, vélos et cinéma à Nantes

valeur d'une part (euros)	été ensoleillé	été pluvieux	espérance
loueur de vélos	12	-4	4
cinéma	-4	12	4
les deux	8	8	8

Chaque part a un écart-type de 8€. Les deux ensemble rapportent 8€ certains. Pour un investisseur qui possède déjà des parts du loueur de vélos, une part de cinéma réduit le risque. Elle vaut plus pour lui que son espérance seule ne le laisse penser.

Exemple alternatif, un fonds géré face à un fonds indiciel

Un fonds géré affiche un rendement moyen de 7 % et un bêta de 1,2. Un fonds indiciel large a un rendement moyen de 6,5 % et un bêta de 1. Le livret rapporte 2,5 %.

En plaçant 120 % de son épargne dans le fonds indiciel, emprunt compris, on obtient un bêta de 1,2 et

$$2,5 + 1,2 \times (6,5 - 2,5) = 7,3 \% > 7 \%.$$

Le fonds géré est sous la droite de marché. À risque égal, la combinaison simple fait mieux.

Exemple alternatif, le studio d'une ville moyenne

Un studio rapporte 6 000 € de loyer net par an. À 120 000 €, son rendement locatif est de 5 %.

- ▶ En cinq ans, son prix monte à 200 000 € alors que les loyers ne bougent pas. Le rendement locatif tombe à 3 %
- ▶ Les acheteurs justifient le prix par la hausse passée, « l'immobilier ne baisse jamais »
- ▶ À 200 000 €, l'achat n'est rentable que si le prix continue de monter. C'est la définition d'une bulle

Exemple alternatif, deux bouchons lyonnais

Deux restaurants voisins, A est meilleur. Chaque passant a l'avis d'un ami, juste avec probabilité 0,7, et voit où sont assis les clients précédents.

- ▶ Les deux premiers passants reçoivent un avis faux, ce qui arrive avec probabilité $0,3^2 = 0,09$. Ils entrent en B
- ▶ Le troisième a un avis favorable à A. Deux choix contre un, il entre en B
- ▶ Tous les suivants font de même. B est plein, A est vide

Sur une longue rue, la probabilité que la foule finisse en B est $0,09/(0,49 + 0,09) = 0,155$.

Exemple alternatif, des places de concert

- ▶ Une tombola attribue au hasard des places de concert. Ceux qui en ont gagné une demandent en moyenne bien plus pour la revendre que ce que les perdants accepteraient de payer pour l'acheter. Le point de référence est la possession
- ▶ Un étudiant qui arrive de Limoges trouve les loyers parisiens injustement élevés. Un Parisien qui s'installe à Limoges trouve les siens bon marché. Le point de référence est le marché d'origine

Exemple alternatif, vendre à perte

- ▶ Inès a acheté des actions à 50 €. Elles valent 40 €. Elle pense qu'un autre placement serait meilleur, mais refuse de vendre et de « réaliser la perte ». Son prix d'achat sert de référence
- ▶ Un propriétaire qui a acheté au plus haut demande plus que le marché et attend des mois avant de baisser son prix
- ▶ Un yaourt « à 95 % sans matière grasse » se vend mieux qu'un yaourt « à 5 % de matière grasse », qui est pourtant le même. C'est un effet de cadrage

Exemple alternatif, les parapluies de la gare

- ▶ Un vendeur propose d'habitude ses parapluies 8 € devant la gare. Un jour d'orage, il les affiche à 20 €. Beaucoup de voyageurs refusent par principe et préfèrent se mouiller
- ▶ Deux colocataires reçoivent un bon d'achat de 100 € à partager. L'un propose, l'autre accepte ou refuse, auquel cas le bon est perdu. Une proposition de 90 et 10 a de bonnes chances d'être refusée

Exemple alternatif, une cagnotte en ligne

- ▶ Une cagnotte pour un collègue propose 10, 20 ou 50 €, ou « autre montant ». La plupart choisissent l'un des montants affichés, et le montant du milieu attire le plus
- ▶ Une offre à 9,99 € par mois paraît bien moins chère qu'une offre à 10,05 €
- ▶ Comparer deux billets de train sans les frais de réservation conduit parfois à choisir le plus cher

Exemple alternatif, un chauffeur de VTC

Un chauffeur de VTC parisien s'est fixé un objectif de 200 € nets par jour.

- ▶ Un jour chargé, il gagne 40 € par heure et s'arrête après 5 heures
- ▶ Un jour creux, 20 € par heure, il travaille 10 heures

Il travaille deux fois plus quand son gain horaire est deux fois plus faible. Le modèle standard prévoit l'inverse, comme pour les chauffeurs new-yorkais.

Annexes

Glossaire et références

Glossaire français-anglais (1/3)

Français	Anglais
loterie	<i>lottery, gamble</i>
état de la nature	<i>state of nature</i>
issue	<i>outcome</i>
gain	<i>payoff</i>
probabilité objective	<i>objective probability</i>
probabilité subjective	<i>subjective probability</i>
risque, incertitude	<i>risk, uncertainty</i>
espérance	<i>expected value</i>
variabilité	<i>variability</i>
écart à l'espérance	<i>deviation</i>
variance	<i>variance</i>
écart-type	<i>standard deviation</i>

Français	Anglais
consommation	<i>contingent</i>
contingente	<i>consumption</i>
plan de consommation	<i>contingent</i>
contingente	<i>consumption plan</i>
dotation	<i>endowment</i>
prime d'assurance	<i>insurance premium</i>
utilité espérée	<i>expected utility</i>
fonction de von	<i>von</i>
Neumann-Morgenstern	<i>Neumann-Morgenstern</i>
	<i>utility function</i>
transformation affine	<i>positive affine</i>
positive	<i>transformation</i>
hypothèse	<i>independence</i>
d'indépendance	<i>assumption</i>

Glossaire français-anglais (2/3)

Français	Anglais
averse au risque	<i>risk averse</i>
neutre au risque	<i>risk neutral</i>
goût pour le risque	<i>risk loving</i>
équivalent certain	<i>certainty equivalent</i>
prime de risque	<i>risk premium</i>
diversification	<i>diversification</i>
variables corrélées négativement	<i>negatively correlated variables</i>
variables corrélées positivement	<i>positively correlated variables</i>
mutualisation des risques	<i>risk spreading</i>
loi des grands nombres	<i>law of large numbers</i>
actuariellement équitable	<i>actuarially fair</i>

Français	Anglais
actif	<i>asset</i>
actif risqué	<i>risky asset</i>
actif sans risque	<i>riskless, risk-free asset</i>
plus-value, moins-value	<i>capital gain, capital loss</i>
rendement	<i>return</i>
rendement réel	<i>real return</i>
rendement espéré	<i>expected return</i>
rendement effectif	<i>actual return</i>
bon du Trésor	<i>Treasury bill</i>
fonds commun de placement	<i>mutual fund</i>
portefeuille	<i>portfolio</i>

Glossaire français-anglais (3/3)

Français	Anglais
modèle moyenne-variance	<i>mean-variance model</i>
droite budgétaire	<i>budget line</i>
prix du risque	<i>price of risk</i>
achat sur marge	<i>buying on margin</i>
effet de levier	<i>leverage</i>
bêta	<i>beta</i>
rendement ajusté pour le risque	<i>risk-adjusted return</i>
droite de marché	<i>market line</i>
MEDAF	<i>CAPM</i>
fonds indiciel	<i>index fund</i>
risque agrégé	<i>aggregate risk</i>
assurance de titre	<i>title insurance</i>
valeur de l'information complète	<i>value of complete information</i>

Français	Anglais
bulle	<i>bubble</i>
cascade informationnelle	<i>informational cascade</i>
économie comportementale	<i>behavioral economics</i>
point de référence	<i>reference point</i>
effet de dotation	<i>endowment effect</i>
aversion aux pertes	<i>loss aversion</i>
cadrage	<i>framing</i>
ancrage	<i>anchoring</i>
règle empirique	<i>rule of thumb</i>
loi des petits nombres	<i>law of small numbers</i>
jeu de l'ultimatum	<i>ultimatum game</i>

Références

Sources du cours

- ▶ R. Pindyck et D. Rubinfeld, *Microeconomics*, 8^e éd., Pearson, 2012, chapitre 5, sections 5.1 à 5.6, exemples 5.1 à 5.10
- ▶ H. Varian, *Intermediate Microeconomics. A Modern Approach*, 9^e éd., Norton, 2014, chapitres 12 (sections 12.1 à 12.8 et appendice) et 13 (sections 13.1, 13.2, 13.4 et 13.5)

Travaux cités par ces deux livres

- ▶ M. Jensen, « The Performance of Mutual Funds in the Period 1945–1964 », *Journal of Finance*, 1968
- ▶ C. Camerer, L. Babcock, G. Loewenstein et R. Thaler, « Labor Supply of New York City Cabdrivers », *Quarterly Journal of Economics*, 1997
- ▶ H. Farber, « Is Tomorrow Another Day ? », *Journal of Political Economy*, 2005
- ▶ V. Crawford et J. Meng, « New York City Cab Drivers' Labor Supply Revisited », *American Economic Review*, 2011
- ▶ S. Bikhchandani, D. Hirshleifer et I. Welch, « Learning from the Behavior of Others », *Journal of Economic Perspectives*, 1998

Annexes

Code Python et R

Code Python, espérance, l'exemple du pétrole

Python

R

```
pi = [1 / 4, 3 / 4]                # succès, échec
X = [40, 20]                        # cours de l'action (dollars)
E = sum(p * x for p, x in zip(pi, X))
print("Espérance du cours :", E, "dollars par action")
```

[◀ Retour](#)

Code R, espérance, l'exemple du pétrole

Python

R

```
pi <- c(1/4, 3/4)           # succès, échec
X  <- c(40, 20)              # cours de l'action (dollars)
cat("Espérance du cours :", sum(pi * X), "dollars par action\n")
```

[◀ Retour](#)

```
import numpy as np
emplois = {"Emploi 1, commission": ([0.5, 0.5], [2000, 1000]),
           "Emploi 2, salaire fixe": ([0.99, 0.01], [1510, 510])}
for nom, (pi, X) in emplois.items():
    pi, X = np.array(pi), np.array(X)
    E = (pi * X).sum()
    ec = X - E                                # écarts à l'espérance
    V = (pi * ec ** 2).sum()
    print(nom, ": E =", round(E, 2), " écarts =", np.round(ec, 2),
          " moyenne pondérée des écarts =", round((pi * ec).sum(), 10))
    print(" carrés des écarts =", (ec ** 2).tolist(), " variance =",
          round(V, 2), " écart-type =", round(np.sqrt(V), 2))
```

```
emplois <- list("Emploi 1, commission" = list(pi = c(0.5, 0.5), X = c(2000, 1000)),
               "Emploi 2, salaire fixe" = list(pi = c(0.99, 0.01), X = c(1510, 510)))
for (nom in names(emplois)) {
  pi <- emplois[[nom]]$pi; X <- emplois[[nom]]$X
  E <- sum(pi * X)
  ec <- X - E                                # écarts à l'espérance
  V <- sum(pi * ec^2)
  cat(nom, ": E =", round(E, 2), " écarts =", round(ec, 2),
      " moyenne pondérée des écarts =", round(sum(pi * ec), 10), "\n")
  cat(" carrés des écarts =", round(ec^2, 2), " variance =", round(V, 2),
      " écart-type =", round(sqrt(V), 2), "\n")
}
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x1 = np.arange(1000, 2001, 100)          # emploi 1, 11 revenus
x2 = np.arange(1300, 1701, 100)         # emploi 2, 5 revenus
for nom, x in (("Emploi 1", x1), ("Emploi 2", x2)):
    p = np.full(len(x), 1 / len(x))
    E = (p * x).sum()
    s = np.sqrt((p * (x - E) ** 2).sum())
    print(nom, ": E =", round(E, 2), " écart-type =", round(s, 2))
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6.4, 2.9)) # chaque distribution tracée en plateau, comme le livre
ax.plot([1000, 1000, 2000, 2000], [0, 1 / 11, 1 / 11, 0], color="#8C8C8C", lw=2, label="Emploi 1")
ax.plot([1300, 1300, 1700, 1700], [0, 1 / 5, 1 / 5, 0], color="#1F4E79", lw=2, label="Emploi 2")
ax.set(xlim=(800, 2200), ylim=(0, 0.25), xticks=[1000, 1500, 2000], yticks=[0.1, 0.2])
ax.set_xlabel("Revenu (dollars)"); ax.set_ylabel("Probabilité")
ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
ax.yaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:.1f}".replace(".", ","))
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
ax.legend(frameon=False, loc="upper right")
fig.tight_layout()
fig.savefig("fig_uniformes.pdf")
plt.show()
```

```
x1 <- seq(1000, 2000, by = 100)           # emploi 1, 11 revenus
x2 <- seq(1300, 1700, by = 100)           # emploi 2, 5 revenus
for (nom in c("Emploi 1", "Emploi 2")) {
  x <- if (nom == "Emploi 1") x1 else x2
  p <- rep(1 / length(x), length(x)); E <- sum(p * x)
  cat(nom, ": E =", round(E, 2), " écart-type =", round(sqrt(sum(p * (x - E)^2)), 2), "\n")
}
# chaque distribution tracée en plateau, comme le livre
plot(c(1000, 1000, 2000, 2000), c(0, 1/11, 1/11, 0), type = "l", lwd = 2, col = "#8C8C8C",
     xlim = c(800, 2200), ylim = c(0, 0.25), xlab = "Revenu (dollars)", ylab = "Probabilité",
     xaxt = "n", yaxt = "n", bty = "l")
lines(c(1300, 1300, 1700, 1700), c(0, 1/5, 1/5, 0), lwd = 2, col = "#1F4E79")
axis(1, at = c(1000, 1500, 2000), labels = c("1 000", "1 500", "2 000"))
axis(2, at = c(0.1, 0.2), labels = c("0,1", "0,2"), las = 1)
legend("topright", c("Emploi 1", "Emploi 2"), col = c("#8C8C8C", "#1F4E79"), lwd = 2, bty = "n")
```

```
import numpy as np
W = np.array([3600, 10000])          # patrimoine avec et sans sinistre (euros)
pi = np.array([0.1, 0.9])           # probabilités des deux états
E = (pi * W).sum()                   # espérance
V = (pi * (W - E) ** 2).sum()        # variance
print("E[W] =", round(E, 2), " Var(W) =", round(V, 2), " sigma =", round(np.sqrt(V), 2))
# avec deux issues,  $Var(W) = p_1 * p_2 * (W_2 - W_1)^2$ 
print("formule à deux issues :", round(pi[0] * pi[1] * (W[1] - W[0]) ** 2, 2))
```

Code R, fil rouge, espérance et écart-type

Python

R

```
W <- c(3600, 10000)           # patrimoine avec et sans sinistre (euros)
pi <- c(0.1, 0.9)             # probabilités des deux états
E <- sum(pi * W)              # espérance
V <- sum(pi * (W - E)^2)       # variance
cat("E[W] =", E, " Var(W) =", V, " sigma =", sqrt(V), "\n")
# avec deux issues, Var(W) = pi1 * pi2 * (W2 - W1)^2
cat("formule à deux issues :", pi[1] * pi[2] * (W[2] - W[1])^2, "\n")
```

[← Retour](#)

Code Python, emploi 1 augmenté de 100 dollars

Python

R

```
import numpy as np
emplois = {"Emploi 1 modifié": ([0.5, 0.5], [2100, 1100]),
           "Emploi 2": ([0.99, 0.01], [1510, 510])}
for nom, (pi, X) in emplois.items():
    pi, X = np.array(pi), np.array(X)
    E = (pi * X).sum()
    s = np.sqrt((pi * (X - E) ** 2).sum())
    print(nom, ": revenu espéré =", round(E, 2), " écart-type =", round(s, 2))
```

[← Retour](#)

Code R, emploi 1 augmenté de 100 dollars

Python

R

```
emplois <- list("Emploi 1 modifié" = list(pi = c(0.5, 0.5), X = c(2100, 1100)),
               "Emploi 2"         = list(pi = c(0.99, 0.01), X = c(1510, 510)))
for (nom in names(emplois)) {
  pi <- emplois[[nom]]$pi; X <- emplois[[nom]]$X
  E  <- sum(pi * X)
  cat(nom, ": revenu espéré =", round(E, 2), " écart-type =",
      round(sqrt(sum(pi * (X - E)^2)), 2), "\n")
}
```

[← Retour](#)

Code Python, stationnement en double file, amende espérée

Python

R

```
politiques = [(6, 1.0), (50, 0.1), (500, 0.01)]    # (amende, probabilité d'être pris)
for amende, p in politiques:
    print(f"amende {amende}, probabilité {p} : amende espérée = {amende * p:.2f}")
```

Code R, stationnement en double file, amende espérée

Python

R

```
amende <- c(6, 50, 500); p <- c(1, 0.1, 0.01)      # amende, probabilité d'être pris
for (k in 1:3)
  cat("amende", amende[k], "dollars, probabilité", p[k], ": amende espérée =",
      sprintf("%.2f", amende[k] * p[k]), "\n")
```

◀ Retour

```
richesse, prix, gain = 100, 5, 200
sans_billet = (richesse, richesse)           # (tiré, pas tiré)
avec_billet = (richesse - prix + gain, richesse - prix)
print("sans billet :", sans_billet, " avec billet :", avec_billet)
```

Code R, le billet de loterie, consommation contingente

Python

R

```
richesse <- 100; prix <- 5; gain <- 200
cat("sans billet :", richesse, richesse,           # (tiré, pas tiré)
    " avec billet :", richesse - prix + gain, richesse - prix, "\n")
```

[◀ Retour](#)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
W1, W2, pi, g = 3600, 10000, 0.1, 0.1      # dotation, probabilité, taux de prime
K = np.linspace(0, 9000, 50)              # montant assuré
c1, c2 = W1 + (1 - g) * K, W2 - g * K      # consommation avec et sans sinistre
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.2, 3.6))
ax.plot([3000, 11000], [3000, 11000], color="#8C8C8C", lw=1, ls="--")
ax.plot(c1, c2, color="#1F4E79", lw=2)
ax.plot(W1, W2, "o", color="#1F4E79")
ax.plot(9360, 9360, "o", color="#C0502B")
ax.annotate("dotation, K = 0", (W1, W2), (4300, 10500), fontsize=9)
ax.annotate("assurance complète\nK = 6 400", (9360, 9360), (6900, 7500), fontsize=9,
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", color="#8C8C8C"))
ax.text(10100, 10800, "c1 = c2", color="#8C8C8C", fontsize=9)
ax.set_xlabel("c1, richesse si sinistre (euros)")
ax.set_ylabel("c2, richesse sans sinistre (euros)")
ax.set_xlim(3000, 11000); ax.set_ylim(3000, 11000)
ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
ax.yaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_plan.pdf"); plt.show()
```

```
W1 <- 3600; W2 <- 10000; g <- 0.1           # dotation, taux de prime
K <- seq(0, 9000, length.out = 50)         # montant assuré
plot(W1 + (1 - g) * K, W2 - g * K, type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79",
     xlim = c(3000, 11000), ylim = c(3000, 11000), bty = "l",
     xlab = "c1, richesse si sinistre (euros)", ylab = "c2, richesse sans sinistre (euros)")
abline(0, 1, lty = 2, col = "#8C8C8C")      # diagonale c1 = c2
points(W1, W2, pch = 19, col = "#1F4E79"); points(9360, 9360, pch = 19, col = "#C0502B")
text(W1, W2, "dotation, K = 0", pos = 4, cex = 0.8)
text(9360, 9360, "assurance complète, K = 6 400", pos = 1, cex = 0.8)
```

Code Python, utilité espérée, fil rouge et exemple de la Partie I

Python

R

```
import numpy as np
u = np.sqrt                                # utilité de von Neumann-Morgenstern
EU = 0.1 * u(3600) + 0.9 * u(10000)
print("Inès : EU =", round(EU, 2), " u(E[W]) = u(9 360) =", round(u(9360), 2))
TMS_dot = 0.1 / (2 * np.sqrt(3600)) / (0.9 / (2 * np.sqrt(10000)))
print("TMS en la dotation =", round(TMS_dot, 4), " sur la diagonale =", round(0.1 / 0.9, 4))
# exemple de la Partie I : 85 000 euros certains ou (100 000 ; 40 000) avec (3/4 ; 1/4)
print("85 000 certains :", round(u(85000), 2),
      " loterie :", round(0.75 * u(100000) + 0.25 * u(40000), 2))
```

[◀ Retour](#)

```
u <- sqrt                                     # utilité de von Neumann-Morgenstern
EU <- 0.1 * u(3600) + 0.9 * u(10000)
cat("Inès : EU =", round(EU, 2), " u(E[W]) = u(9 360) =", round(u(9360), 2), "\n")
TMS_dot <- (0.1 / (2 * sqrt(3600))) / (0.9 / (2 * sqrt(10000)))
cat("TMS en la dotation =", round(TMS_dot, 4),
    " sur la diagonale =", round(0.1 / 0.9, 4), "\n")
# exemple de la Partie I : 85 000 euros certains ou (100 000 ; 40 000) avec (3/4 ; 1/4)
cat("85 000 certains :", round(u(85000), 2),
    " loterie :", round(0.75 * u(100000) + 0.25 * u(40000), 2), "\n")
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
pi = 0.1 # probabilité du sinistre
c1 = np.linspace(500, 11000, 300)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.2, 3.6))
for U, col in ((94, "#8C8C8C"), (96, "#1F4E79"), (98, "#8C8C8C")):
    c2 = ((U - pi * np.sqrt(c1)) / (1 - pi)) ** 2 #  $pi \cdot \sqrt{c1} + (1-pi) \cdot \sqrt{c2} = U$ 
    ax.plot(c1, c2, color=col, lw=2 if U == 96 else 1)
    y = ((U - pi * np.sqrt(10700)) / (1 - pi)) ** 2
    ax.text(10700, y + 120, f"EU = {U}", fontsize=8)
ax.plot([3000, 11000], [3000, 11000], color="#8C8C8C", lw=1, ls="--")
ax.plot(3600, 10000, "o", color="#1F4E79"); ax.plot(9216, 9216, "o", color="#C0502B")
ax.annotate("dotation", (3600, 10000), (4100, 10450), fontsize=9)
ax.annotate("(9 216 ; 9 216) \npente $= -\\pi_1/\\pi_2 = -1/9$", (9216, 9216), (5200, 7600),
            fontsize=9, arrowprops=dict(arrowstyle="->", color="#8C8C8C"))
ax.set_xlim(3000, 11500); ax.set_ylim(7000, 11000)
ax.set_xlabel("c1, richesse si sinistre (euros)")
ax.set_ylabel("c2, sans sinistre (euros)")
ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
ax.yaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_courbes_eu.pdf"); plt.show()
```

```
pi <- 0.1 # probabilité du sinistre
c1 <- seq(500, 11000, length.out = 300)
plot(NA, xlim = c(3000, 11500), ylim = c(7000, 11000), bty = "l",
     xlab = "c1, richesse si sinistre (euros)", ylab = "c2, sans sinistre (euros)")
for (U in c(94, 96, 98)) { #  $\pi \sqrt{c1} + (1-\pi)\sqrt{c2} = U$ 
  lines(c1, ((U - pi * sqrt(c1)) / (1 - pi))^2, lwd = ifelse(U == 96, 2, 1),
        col = ifelse(U == 96, "#1F4E79", "#8C8C8C"))
  text(10700, ((U - pi * sqrt(10700)) / (1 - pi))^2, paste("EU =", U), pos = 3, cex = 0.7)
}
abline(0, 1, lty = 2, col = "#8C8C8C")
points(3600, 10000, pch = 19, col = "#1F4E79")
points(9216, 9216, pch = 19, col = "#C0502B")
text(9216, 9216, "(9 216 ; 9 216), pente -1/9", pos = 1, cex = 0.8)
```

```
import numpy as np
L = ([0.1, 0.9], [3600, 10000])          # loterie d'Inès sans assurance
certain = 9300                          # 9 300 euros certains
fonctions = {"u = racine(W)": lambda w: np.sqrt(w),
             "v = 2 racine(W) + 5": lambda w: 2 * np.sqrt(w) + 5,
             "w = (racine(W))^4 = W^2": lambda w: np.sqrt(w) ** 4}
for nom, f in fonctions.items():
    EL = sum(p * f(x) for p, x in zip(*L))
    choix = "certain" if f(certain) > EL else "loterie"
    print(f"{nom:24s} EU(loterie) = {EL:,.2f}  u(9 300) = {f(certain):,.2f}  -> {choix}")
```

```
pi <- c(0.1, 0.9); X <- c(3600, 10000)           # loterie d'Inès sans assurance
certain <- 9300                                   # 9 300 euros certains
fonctions <- list("u = racine(W)"                = function(w) sqrt(w),
                  "v = 2 racine(W) + 5"          = function(w) 2 * sqrt(w) + 5,
                  "w = (racine(W))^4 = W^2"       = function(w) sqrt(w)^4)
for (nom in names(fonctions)) {
  f <- fonctions[[nom]]; EL <- sum(pi * f(X))
  choix <- ifelse(f(certain) > EL, "certain", "loterie")
  f2 <- function(v) format(round(v, 2), big.mark = ",", nsmall = 2)
  cat(sprintf("%-24s EU(loterie) = %s u(9 300) = %s -> %s\n", nom,
              f2(EL), f2(f(certain)), choix))
}
```

```
import numpy as np
pi, W = np.array([0.1, 0.9]), np.array([3600, 10000])
for nom, u in (("racine", np.sqrt), ("logarithme", np.log)):
    EU = (pi * u(W)).sum()
    choix = "garde le risque" if EU > u(9200) else "prend 9 200 certains"
    print(f"{nom:10s} EU = {EU:.3f} u(9 200) = {u(9200):.3f} -> {choix}")
```

Code R, racine ou logarithme

Python

R

```
pi <- c(0.1, 0.9); W <- c(3600, 10000)
for (nom in c("racine", "logarithme")) {
  u <- if (nom == "racine") sqrt else log
  EU <- sum(pi * u(W))
  choix <- ifelse(EU > u(9200), "garde le risque", "prend 9 200 certains")
  cat(sprintf("%-10s EU = %.3f u(9 200) = %.3f -> %s\n", nom, EU, u(9200), choix))
}
```

[◀ Retour](#)

Code Python, un emploi sûr ou un emploi risqué

Python

R

```
u = {10: 10, 15: 13.5, 20: 16, 30: 18}          # utilité, revenus en milliers de dollars
EU = 0.5 * u[10] + 0.5 * u[30]                  # offre risquée, 10 ou 30
print("offre risquée : E =", 0.5 * 10 + 0.5 * 30, " EU =", EU)
print("15 000 certains : u =", u[15], " 20 000 certains : u =", u[20])
```

[◀ Retour](#)

Code R, un emploi sûr ou un emploi risqué

Python

R

```
u <- c("10" = 10, "15" = 13.5, "20" = 16, "30" = 18) # revenus en milliers de dollars
EU <- 0.5 * u[["10"]] + 0.5 * u[["30"]]                # offre risquée, 10 ou 30
cat("offre risquée : E =", 0.5 * 10 + 0.5 * 30, " EU =", EU, "\n")
cat("15 000 certains : u =", u[["15"]], " 20 000 certains : u =", u[["20"]], "\n")
```

[← Retour](#)

```
import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
def courbe(x, y):
    # courbe lisse (Hermite) passant par les points du livre
    x, y = np.array(x, float), np.array(y, float); h = np.diff(x); s = np.diff(y) / h
    d = np.r_[0, 2 / (1 / s[:-1] + 1 / s[1:]), 0]
    d[0], d[-1] = max(0, (3 * s[0] - d[1]) / 2), max(0, (3 * s[-1] - d[-2]) / 2)
    X = np.linspace(x[0], x[-1], 300); k = np.clip(np.searchsorted(x, X) - 1, 0, len(h) - 1); t = (X - x[k]) / h[k]
    return X, (2*t**3 - 3*t**2 + 1)*y[k] + (t**3 - 2*t**2 + t)*h[k]*d[k] + (3*t**2 - 2*t**3)*y[k+1] + (t**3 - t**2)*h[k]*d[k+1]
panneaux = {"(a) aversé au risque": ([0, 10, 15, 16, 20, 30], [0, 10, 13.5, 14, 16, 18], "ABCDE"),
            "(b) goût pour le risque": ([0, 10, 20, 30], [0, 3, 8, 18], "ACE"),
            "(c) neutre au risque": ([0, 10, 20, 30], [0, 6, 12, 18], "ACE")}
fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(9.6, 3.1), gridspec_kw={"width_ratios": [1.6, 1, 1]})
for ax, (nom, (W, u, lettres)) in zip(axs, panneaux.items()):
    EU = 0.5 * u[W.index(10)] + 0.5 * u[-1] # loterie 10 ou 30, proba 1/2
    print(nom, " : EU =", EU, " u(20) =", u[W.index(20)])
    for x, y, n in zip(W[1:], u[1:], lettres): # pointillés vers les axes, comme le livre
        ax.plot([0, x, x], [y, y, 0], color="#8C8C8C", ls="--", lw=0.6); ax.annotate(n, (x - 1.6, y + 0.7), fontsize=8)
    ax.plot([10, 30], [u[W.index(10)], u[-1]], color="#8C8C8C", ls="--", lw=1); ax.plot(*courbe(W, u), color="#1F4E79", lw=2)
    ax.plot(W[1:], u[1:], "o", color="#1F4E79", ms=3.5); ax.plot(20, EU, "s", color="#C0502B", ms=5)
    ax.set(title=nom, xlabel="Revenu (milliers de dollars)", xlim=(0, 33), ylim=(0, 20), xticks=W[1:], yticks=u[1:])
    ax.set_yticklabels([f"{v:g}".replace(".", ",") for v in u[1:]]); ax.tick_params(labels=7)
    ax.title.set_fontsize(10); ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
a = axs[0]; a.set_ylabel("Utilité"); a.annotate("F", (20.6, 12.7), size=8); a.plot([16, 20], [14, 14], "--", c="#8C8C8C", lw=.6)
a.get_xticklabels()[1].set_ha("right"); a.get_xticklabels()[2].set_ha("left") # 15 et 16 côte à côte
a.get_yticklabels()[1].set_va("top"); a.get_yticklabels()[2].set_va("bottom") # 13,5 et 14 aussi
print("emploi actuel, 15 000 dollars certains : u = 13,5 < EU = 14")
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_attitudes.pdf"); plt.show()
```

```

courbe <- function(x, y) {
  # courbe lisse (Hermite) passant par les points du livre
  n <- length(x); h <- diff(x); s <- diff(y) / h
  d <- c(0, 2 / (1 / s[-(n - 1)] + 1 / s[-1]), 0)
  d[1] <- max(0, (3 * s[1] - d[2]) / 2); d[n] <- max(0, (3 * s[n - 1] - d[n - 1]) / 2)
  X <- seq(x[1], x[n], length.out = 300); k <- pmin(findInterval(X, x), n - 1); t <- (X - x[k]) / h[k]
  list(x = X, y = (2*t^3 - 3*t^2 + 1)*y[k] + (t^3 - 2*t^2 + t)*h[k]*d[k] + (3*t^2 - 2*t^3)*y[k+1] + (t^3 - t^2)*h[k]*d[k+1])
}

panneaux <- list("a) aversive au risque" = list(c(0, 10, 15, 16, 20, 30), c(0, 10, 13.5, 14, 16, 18), c("A", "B", "C", "D", "E")),
  "b) goût pour le risque" = list(c(0, 10, 20, 30), c(0, 3, 8, 18), c("A", "C", "E")),
  "c) neutre au risque" = list(c(0, 10, 20, 30), c(0, 6, 12, 18), c("A", "C", "E")))

layout(matrix(1:3, 1), widths = c(1.6, 1, 1))
for (nom in names(panneaux)) {
  W <- panneaux[[nom]][[1]]; u <- panneaux[[nom]][[2]]; m <- length(u)
  EU <- 0.5 * u[W == 10] + 0.5 * u[m] # loterie 10 ou 30, proba 1/2
  cat(nom, ": EU =", EU, " u(20) =", u[W == 20], "\n")
  plot(courbe(W, u), type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79", xlim = c(0, 33), ylim = c(0, 20), xaxs = "i", yaxs = "i",
    axes = FALSE, main = nom, xlab = "Revenu (milliers de dollars)", ylab = "Utilité")
  axis(1, at = W[-1]); axis(2, at = u[-1], labels = sub(".", "", u[-1], fixed = TRUE), las = 1); box(bty = "l")
  segments(0, u[-1], W[-1], u[-1], lty = 2, col = "#8C8C8C"); segments(W[-1], 0, W[-1], u[-1], lty = 2, col = "#8C8C8C")
  lines(c(10, 30), c(u[W == 10], u[m]), lty = 2, col = "#8C8C8C") # pointillés et corde, comme le livre
  points(W[-1], u[-1], pch = 19, col = "#1F4E79"); points(20, EU, pch = 15, col = "#C0502B")
  text(W[-1], u[-1], panneaux[[nom]][[3]], pos = 2, cex = 0.8)
  if (nom == "(a) aversive au risque") { text(20, 14, "F", pos = 4, cex = 0.8); segments(16, 14, 20, 14, lty = 2, col = "#8C8C8C") }
}

layout(1)
cat("emploi actuel, 15 000 dollars certains : u = 13,5 < EU = 14\n")

```

```
import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
def courbe(x, y):
    # courbe lisse (Hermite) passant par les points du livre
    x, y = np.array(x, float), np.array(y, float); h = np.diff(x); s = np.diff(y) / h
    d = np.r_[0, 2 / (1 / s[:-1] + 1 / s[1:]), 0]
    d[0], d[-1] = max(0, (3 * s[0] - d[1]) / 2), max(0, (3 * s[-1] - d[-2]) / 2)
    X = np.linspace(x[0], x[-1], 300); k = np.clip(np.searchsorted(x, X) - 1, 0, len(h) - 1); t = (X - x[k]) / h[k]
    return X, (2*t**3 - 3*t**2 + 1)*y[k] + (t**3 - 2*t**2 + t)*h[k]*d[k] + (3*t**2 - 2*t**3)*y[k+1] + (t**3 - t**2)*h[k]*d[k+1]
W, u = [0, 10, 16, 30, 40], [0, 10, 14, 18, 20] # points 0, A, C, E, G du livre (milliers de dollars)
for nom, EU in (("10 ou 30", 0.5 * 10 + 0.5 * 18), ("0 ou 40", 0.5 * 0 + 0.5 * 20)):
    EC = np.interp(EU, u, W) # revenu certain de même utilité
    print(nom, ": EU =", EU, " équivalent certain =", EC, " prime =", 20 - EC)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.6, 3.3))
pts = {"A": (10, 10), "C": (16, 14), "F": (20, 14), "E": (30, 18), "G": (40, 20)}
for n, (x, y) in pts.items(): # pointillés vers les axes, comme le livre
    ax.plot([0, x, x], [y, y, 0], color="#8C8C8C", ls="--", lw=0.6); ax.annotate(n, (x - 1.4, y + 0.6), fontsize=9)
ax.plot([10, 30], [10, 18], color="#8C8C8C", ls="--", lw=1) # corde AE, F en est le milieu
ax.plot(*courbe(W, u), color="#1F4E79", lw=2)
ax.plot([16, 20], [14, 14], color="#C0502B", lw=2.5); ax.text(16.4, 12.3, "prime 4", color="#C0502B", fontsize=9)
for n, (x, y) in pts.items():
    ax.plot(x, y, "s" if n == "F" else "o", color="#C0502B" if n == "F" else "#1F4E79", ms=4.5)
ax.set(xlim=(0, 42), ylim=(0, 22), xticks=[10, 16, 20, 30, 40], yticks=[10, 14, 18, 20])
ax.set_xlabel("Revenu (milliers de dollars)"); ax.set_ylabel("Utilité")
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_prime_pr.pdf"); plt.show()
```

```
courbe <- function(x, y) {          # courbe lisse (Hermite) passant par les points du livre
  n <- length(x); h <- diff(x); s <- diff(y) / h
  d <- c(0, 2 / (1 / s[-(n - 1)] + 1 / s[-1]), 0)
  d[1] <- max(0, (3 * s[1] - d[2]) / 2); d[n] <- max(0, (3 * s[n - 1] - d[n - 1]) / 2)
  X <- seq(x[1], x[n], length.out = 300); k <- pmin(findInterval(X, x), n - 1); t <- (X - x[k]) / h[k]
  list(x = X, y = (2*t^3 - 3*t^2 + 1)*y[k] + (t^3 - 2*t^2 + t)*h[k]*d[k] + (3*t^2 - 2*t^3)*y[k+1] + (t^3 - t^2)*h[k]*d[k+1])
}
W <- c(0, 10, 16, 30, 40); u <- c(0, 10, 14, 18, 20)      # points O, A, C, E, G du livre (milliers de dollars)
for (cas in list(list("10 ou 30", 0.5 * 10 + 0.5 * 18), list("0 ou 40", 0.5 * 0 + 0.5 * 20))) {
  EU <- cas[[2]]; EC <- approx(u, W, xout = EU)$y        # revenu certain de même utilité
  cat(cas[[1]], ": EU =", EU, " équivalent certain =", EC, " prime =", 20 - EC, "\n")
}
px <- c(10, 16, 20, 30, 40); py <- c(10, 14, 14, 18, 20) # A, C, F, E, G
plot(courbe(W, u), type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79", xlim = c(0, 42), ylim = c(0, 22), xaxs = "i", yaxs = "i",
     axes = FALSE, xlab = "Revenu (milliers de dollars)", ylab = "Utilité")
axis(1, at = c(10, 16, 20, 30, 40)); axis(2, at = c(10, 14, 18, 20), las = 1); box(bty = "l")
segments(0, py, px, py, lty = 2, col = "#8C8C8C"); segments(px, 0, px, py, lty = 2, col = "#8C8C8C")
lines(c(10, 30), c(10, 18), lty = 2, col = "#8C8C8C")    # corde AE, F en est le milieu
segments(16, 14, 20, 14, lwd = 3, col = "#C0502B"); text(18, 14, "prime 4", pos = 1, col = "#C0502B", cex = 0.8)
points(px, py, pch = c(19, 19, 15, 19, 19), col = c(rep("#1F4E79", 2), "#C0502B", rep("#1F4E79", 2)))
text(px, py, c("A", "C", "F", "E", "G"), pos = 3, cex = 0.8)
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
W1, W2, pi = 3600, 10000, 0.1
E = pi * W1 + (1 - pi) * W2 # 9 360
EU = pi * np.sqrt(W1) + (1 - pi) * np.sqrt(W2)
EC = EU ** 2 # u(EC) = EU, donc EC = EU^2
print("E[W] =", E, " EU =", EU, " EC =", EC, " prime rho =", E - EC)
w = np.linspace(2500, 10600, 300)
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8.4, 3.1))
for ax, (a, b) in zip(axs, ((2500, 10600), (9100, 9420))):
    ax.plot(w, np.sqrt(w), color="#1F4E79", lw=2)
    ax.plot([W1, W2], [np.sqrt(W1), np.sqrt(W2)], color="#8C8C8C", ls="--", lw=1)
    ax.plot([EC, E], [EU, EU], color="#C0502B", lw=2.5)
    ax.plot(E, np.sqrt(E), "o", color="#1F4E79"); ax.plot(E, EU, "s", color="#C0502B")
    ax.set_xlim(a, b); ax.set_ylim(np.sqrt(a) - 0.3, np.sqrt(b) + 0.3)
    ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
    ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False); ax.set_xlabel("Richesse W (euros)")
axs[0].set_ylabel("$u(W) = \sqrt{W}$"); axs[1].set_title("Zoom", fontsize=10)
axs[1].text(9225, 96.15, "$\\rho = 144$", color="#C0502B")
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_prime_fil.pdf"); plt.show()
```

```
W1 <- 3600; W2 <- 10000; pi <- 0.1
E <- pi * W1 + (1 - pi) * W2                                # 9 360
EU <- pi * sqrt(W1) + (1 - pi) * sqrt(W2)
EC <- EU^2                                                    #  $u(EC) = EU$ , donc  $EC = EU^2$ 
cat("E[W] =", E, " EU =", EU, " EC =", EC, " prime rho =", E - EC, "\n")
par(mfrow = c(1, 2))
for (lim in list(c(2500, 10600), c(9100, 9420))) {
  w <- seq(lim[1], lim[2], length.out = 300)
  plot(w, sqrt(w), type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79", bty = "l",
       xlab = "Richesse W (euros)", ylab = expression(u(W) == sqrt(W)))
  lines(c(W1, W2), sqrt(c(W1, W2)), lty = 2, col = "#8C8C8C")
  segments(EC, EU, E, EU, lwd = 3, col = "#C0502B")
  points(E, sqrt(E), pch = 19, col = "#1F4E79"); points(E, EU, pch = 15, col = "#C0502B")
}
text(9250, 96.1, expression(rho == 144), col = "#C0502B"); par(mfrow = c(1, 1))
```

```
import numpy as np
W, pi = np.array([3600, 10000]), np.array([0.1, 0.9])
E = (pi * W).sum()
agents = {"averse, u = racine(W)": (np.sqrt, lambda v: v ** 2),
          "neutre, u = W": (lambda w: w, lambda v: v),
          "goût du risque, u = W^2": (lambda w: w ** 2.0, np.sqrt)}
for nom, (u, u_inv) in agents.items():
    EU = (pi * u(W)).sum()
    EC = u_inv(EU)                                # équivalent certain
    print(f"{nom:24s} EC = {EC:9.1f}    prime rho = E[W] - EC = {E - EC:7.1f}")
```

```
W <- c(3600, 10000); pi <- c(0.1, 0.9); E <- sum(pi * W)
agents <- list("averse, u = racine(W)" = list(u = sqrt, inv = function(v) v^2),
              "neutre, u = W" = list(u = function(w) w, inv = function(v) v),
              "goût du risque, u = W^2" = list(u = function(w) w^2, inv = sqrt))
for (nom in names(agents)) {
  EU <- sum(pi * agents[[nom]]$u(W))
  EC <- agents[[nom]]$inv(EU) # équivalent certain
  cat(sprintf("%-24s EC = %9.1f   prime rho = E[W] - EC = %7.1f\n", nom, EC, E - EC))
}
```

Code Python, prime maximale pour une assurance complète

Python

R

```
import numpy as np
EC = (0.1 * np.sqrt(3600) + 0.9 * np.sqrt(10000)) ** 2    # équivalent certain
print("prime maximale =", round(10000 - EC, 2))
print("dont perte espérée =", 0.1 * 6400, " et prime de risque =", round(9360 - EC, 2))
```

◀ Retour

Code R, prime maximale pour une assurance complète

Python

R

```
EC <- (0.1 * sqrt(3600) + 0.9 * sqrt(10000))^2      # équivalent certain
cat("prime maximale =", round(10000 - EC, 2), "\n")
cat("dont perte espérée =", 0.1 * 6400,
    " et prime de risque =", round(9360 - EC, 2), "\n")
```

[← Retour](#)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
s = np.linspace(0, 5, 100)                                # écart-type du revenu
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8.0, 3.0), sharey=True)
for ax, (c, titre) in zip(axs, ((0.40, "(a) forte aversion au risque"),
                                (0.08, "(b) faible aversion au risque"))):
    for k, nom in zip((10, 12, 14), ("U1", "U2", "U3")):
        ax.plot(s, k + c * s ** 2, color="#1F4E79", lw=1.6)    # espérance =  $k + c * \sigma^2$ 
        ax.text(5.05, k + c * 25, nom, fontsize=9, va="center")
    ax.set_title(titre, fontsize=10); ax.set_xticks([]); ax.set_yticks([])
    ax.set_xlabel("Écart-type du revenu"); ax.set_xlim(0, 5.6); ax.set_ylim(9, 25)
    ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
axs[0].set_ylabel("Revenu espéré")
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_courbes_mv.pdf"); plt.show()
```

```
s <- seq(0, 5, length.out = 100) # écart-type du revenu
par(mfrow = c(1, 2))
for (cas in list(list(0.40, "(a) forte aversion au risque"),
                 list(0.08, "(b) faible aversion au risque"))) {
  plot(NA, xlim = c(0, 5.6), ylim = c(9, 25), xaxt = "n", yaxt = "n", bty = "l",
       main = cas[[2]], xlab = "Écart-type du revenu", ylab = "Revenu espéré")
  for (k in c(10, 12, 14)) {
    lines(s, k + cas[[1]] * s^2, lwd = 1.6, col = "#1F4E79") #  $E = k + c \sigma^2$ 
    text(5.3, k + cas[[1]] * 25, paste0("U", (k - 8) / 2), cex = 0.8)
  }
}
```

```
import numpy as np
pi = np.array([0.5, 0.5])           # été chaud, été froid
clim = np.array([30000, 12000])      # revenu si l'on ne vend que des climatiseurs
chauf = np.array([12000, 30000])     # revenu si l'on ne vend que des radiateurs
for nom, R in (("climatiseurs seuls", clim), ("radiateurs seuls", chauf),
               ("moitié-moitié", 0.5 * clim + 0.5 * chauf)):
    E = (pi * R).sum()
    s = np.sqrt((pi * (R - E) ** 2).sum())
    print(f"{nom:20s} revenus = {R}   E = {E:.0f}   écart-type = {s:.0f}")
```

```
pi      <- c(0.5, 0.5)                # été chaud, été froid
clim    <- c(30000, 12000)             # revenu si l'on ne vend que des climatiseurs
chauf   <- c(12000, 30000)             # revenu si l'on ne vend que des radiateurs
cas <- list("climatiseurs seuls" = clim, "radiateurs seuls" = chauf,
           "moitié-moitié" = 0.5 * clim + 0.5 * chauf)
for (nom in names(cas)) {
  R <- cas[[nom]]; E <- sum(pi * R)
  cat(sprintf("%-20s revenus = %s  E = %.0f  écart-type = %.0f\n", nom,
              paste(R, collapse = " "), E, sqrt(sum(pi * (R - E)^2))))
}
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
rho = np.linspace(-1, 1, 201)
sigma = 9000 * np.sqrt((1 + rho) / 2)      # écart-type du revenu moitié-moitié
for r in (-1, -0.5, 0, 0.5, 1):
    print(f"rho = {r:5.1f}    écart-type = {9000 * np.sqrt((1 + r) / 2):7.1f}")
print("baisse de l'écart-type pour rho = 0 :", round(1 - np.sqrt(0.5), 3))
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.6, 3.0))
ax.plot(rho, sigma, color="#1F4E79", lw=2)
ax.plot([-1, 0, 1], [0, 9000 * np.sqrt(0.5), 9000], "o", color="#C0502B")
ax.axhline(9000, color="#8C8C8C", ls="--", lw=1)
ax.text(-0.98, 8400, "une seule activité : 9 000", color="#8C8C8C", fontsize=9)
ax.set_xlabel("Corrélation entre les deux activités")
ax.set_ylabel("Écart-type du revenu (dollars)")
ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:g}".replace(".", ","))
ax.yaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
ax.spines[["top", "right"].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_correlation.pdf"); plt.show()
```

```
rho <- seq(-1, 1, length.out = 201)
sigma <- 9000 * sqrt((1 + rho) / 2) # écart-type du revenu moitié-moitié
for (r in c(-1, -0.5, 0, 0.5, 1))
  cat(sprintf("rho = %5.1f   écart-type = %7.1f\n", r, 9000 * sqrt((1 + r) / 2)))
cat("baisse de l'écart-type pour rho = 0 :", round(1 - sqrt(0.5), 3), "\n")
plot(rho, sigma, type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79", bty = "l",
     xlab = "Corrélation entre les deux activités",
     ylab = "Écart-type du revenu (dollars)")
points(c(-1, 0, 1), c(0, 9000 * sqrt(0.5), 9000), pch = 19, col = "#C0502B")
abline(h = 9000, lty = 2, col = "#8C8C8C")
text(-0.6, 8600, "une seule activité : 9 000", col = "#8C8C8C", cex = 0.8)
```

```
import numpy as np
pi = np.array([0.1, 0.9]) # cambriolage, pas de cambriolage
cas = {"sans assurance": np.array([40000, 50000]),
       "avec assurance (prime 1 000)": np.array([49000, 49000])}
for nom, W in cas.items():
    E = (pi * W).sum()
    print(f"{nom:30s} E = {E:.0f}    écart-type = {np.sqrt((pi * (W - E) ** 2).sum()):.0f}")
print("perte espérée =", 0.1 * 10000, " = prime actuariellement équitable")
```

```
pi <- c(0.1, 0.9)                                # cambriolage, pas de cambriolage
cas <- list("sans assurance" = c(40000, 50000),
           "avec assurance (prime 1 000)" = c(49000, 49000))
for (nom in names(cas)) {
  W <- cas[[nom]]; E <- sum(pi * W)
  cat(sprintf("%-30s E = %.0f   écart-type = %.0f\n", nom, E, sqrt(sum(pi * (W - E)^2))))
}
cat("perte espérée =", 0.1 * 10000, " = prime actuariellement équitable\n")
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
W1, W2, pi, g = 3600, 10000, 0.1, 0.1
K = np.linspace(0, 9000, 50)
c1 = np.linspace(3000, 11500, 300)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.2, 3.6))
ax.plot(W1 + (1 - g) * K, W2 - g * K, color="#1F4E79", lw=2)          # droite de budget
for U, col in ((96, "#8C8C8C"), (np.sqrt(9360), "#C0502B")):
    ax.plot(c1, ((U - pi * np.sqrt(c1)) / (1 - pi)) ** 2, color=col, lw=1.4)
ax.plot([3000, 11500], [3000, 11500], color="#8C8C8C", lw=1, ls="--")
ax.plot(W1, W2, "o", color="#1F4E79"); ax.plot(9360, 9360, "o", color="#C0502B")
ax.annotate("optimum (9 360 ; 9 360)", (9360, 9360), (5200, 9050), fontsize=9,
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", color="#8C8C8C"))
ax.set_xlim(3000, 11500); ax.set_ylim(8900, 10250)
ax.set_xlabel("c1, richesse si sinistre (euros)")
ax.set_ylabel("c2, sans sinistre (euros)")
ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
ax.yaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_assurance_equitable.pdf"); plt.show()
print("EU sans assurance = 96, EU assurance complète =", round(np.sqrt(9360), 3))
```

```
W1 <- 3600; W2 <- 10000; pi <- 0.1; g <- 0.1
K <- seq(0, 9000, length.out = 50)
c1 <- seq(3000, 11500, length.out = 300)
plot(W1 + (1 - g) * K, W2 - g * K, type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79", bty = "l",
     xlim = c(3000, 11500), ylim = c(8900, 10250),
     xlab = "c1, richesse si sinistre (euros)", ylab = "c2, sans sinistre (euros)")
lines(c1, ((96 - pi * sqrt(c1)) / (1 - pi))^2, col = "#8C8C8C")
lines(c1, ((sqrt(9360) - pi * sqrt(c1)) / (1 - pi))^2, col = "#C0502B")
abline(0, 1, lty = 2, col = "#8C8C8C")
points(W1, W2, pch = 19, col = "#1F4E79"); points(9360, 9360, pch = 19, col = "#C0502B")
text(9360, 9360, "optimum (9 360 ; 9 360)", pos = 2, cex = 0.8)
cat("EU sans assurance = 96, EU assurance complète =", round(sqrt(9360), 3), "\n")
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
W1, W2, pi = 3600, 10000, 0.1
K = np.linspace(0, 8000, 801)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.6, 3.1))
for g, col in ((0.10, "#1F4E79"), (0.12, "#C0502B")):
    EU = pi * np.sqrt(W1 + (1 - g) * K) + (1 - pi) * np.sqrt(W2 - g * K)
    k2 = ((1 - pi) * g / (pi * (1 - g))) ** 2          # c2 / c1 à l'optimum
    Ks = (W2 - k2 * W1) / (g + k2 * (1 - g))          # montant assuré optimal
    EUs = pi * np.sqrt(W1 + (1 - g) * Ks) + (1 - pi) * np.sqrt(W2 - g * Ks)
    print(f"gamma = {g:.2f}    K* = {Ks:7.1f}    EU(K*) = {EUs:.3f}    EU(0) = 96")
    ax.plot(K, EU, color=col, lw=2, label=f"$\\gamma$ = {g:.2f}".replace(".", ","))
    ax.plot(Ks, EUs, "o", color=col)
ax.set_xlabel("Montant assuré K (euros)"); ax.set_ylabel("Utilité espérée")
ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
ax.yaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:g}".replace(".", ","))
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False); ax.legend(frameon=False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_assurance_chargee.pdf"); plt.show()
```

```
W1 <- 3600; W2 <- 10000; pi <- 0.1
K <- seq(0, 8000, length.out = 801)
plot(NA, xlim = c(0, 8000), ylim = c(95.9, 96.8), bty = "l",
     xlab = "Montant assuré K (euros)", ylab = "Utilité espérée")
for (g in c(0.10, 0.12)) {
  col <- ifelse(g == 0.10, "#1F4E79", "#C0502B")
  lines(K, pi * sqrt(W1 + (1 - g) * K) + (1 - pi) * sqrt(W2 - g * K), lwd = 2, col = col)
  k2 <- ((1 - pi) * g / (pi * (1 - g)))^2           # c2 / c1 à l'optimum
  Ks <- (W2 - k2 * W1) / (g + k2 * (1 - g))         # montant assuré optimal
  EUs <- pi * sqrt(W1 + (1 - g) * Ks) + (1 - pi) * sqrt(W2 - g * Ks)
  cat(sprintf("gamma = %.2f   K* = %7.1f   EU(K*) = %.3f   EU(0) = 96\n", g, Ks, EUs))
  points(Ks, EUs, pch = 19, col = col)
}
legend("bottomright", c("gamma = 0,10", "gamma = 0,12"),
     col = c("#1F4E79", "#C0502B"), lwd = 2, bty = "n")
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom
pi, L = 0.1, 6400
fig, axs = plt.subplots(1, 4, figsize=(8.6, 2.5), sharey=False)
for ax, N in zip(axs, (1, 10, 100, 1000)):
    S = np.arange(N + 1) # nombre de sinistres
    cout, prob = L * S / N, binom.pmf(S, N, pi) # coût par assuré et probabilité
    s = np.sqrt((prob * (cout - 640) ** 2).sum())
    queue = binom.sf(800 * N / L, N, pi) # P(coût > 800)
    print(f"N = {N:5d}  moyenne = {(cout * prob).sum():6.1f}  écart-type = {s:7.1f}"
          f"  P(coût > 800) = {queue:.4f}")
    ax.vlines(cout, 0, prob, color="#1F4E79", lw=1.5)
    ax.axvline(640, color="#C0502B", lw=1, ls="--")
    ax.set_title(f"N = {N}", fontsize=10); ax.set_xlim(-300, 6900); ax.set_yticks([])
    ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:,.0f}".replace(",", " "))
    ax.spines[["top", "right", "left"]].set_visible(False)
entre = binom.cdf(125, 1000, pi) - binom.cdf(78, 1000, pi)
print(f"N = 1000, P(500 <= coût <= 800) =", round(entre, 4))
fig.supxlabel("Coût moyen par assuré (euros)", fontsize=10)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_mutualisation.pdf"); plt.show()
```

```
pi <- 0.1; L <- 6400
par(mfrow = c(1, 4))
for (N in c(1, 10, 100, 1000)) {
  S <- 0:N                                     # nombre de sinistres
  cout <- L * S / N; prob <- dbinom(S, N, pi)   # coût par assuré et probabilité
  s <- sqrt(sum(prob * (cout - 640)^2))
  queue <- 1 - pbinom(floor(800 * N / L), N, pi) # P(coût > 800)
  cat(sprintf("N = %5d  moyenne = %6.1f  écart-type = %7.1f  P(coût > 800) = %.4f\n",
    N, sum(cout * prob), s, queue))
  plot(cout, prob, type = "h", lwd = 1.5, col = "#1F4E79", xlim = c(-300, 6900),
    yaxt = "n", bty = "n", main = paste("N =", N),
    xlab = "Coût moyen par assuré (euros)", ylab = "")
  abline(v = 640, lty = 2, col = "#C0502B")
}
par(mfrow = c(1, 1))
entre <- pbinom(125, 1000, pi) - pbinom(78, 1000, pi)
cat("N = 1000, P(500 <= coût <= 800) =", round(entre, 4), "\n")
```

Code Python, assurance de titre, enchère d'un acheteur neutre

Python

R

```
valeur, p_probleme = 300000, 1 / 20
enchere = (1 - p_probleme) * valeur + p_probleme * 0
print("enchère maximale d'un acheteur neutre au risque :", enchere, "dollars")
print("perte espérée sans assurance :", p_probleme * valeur, " frais d'assurance : 1 500")
```

[← Retour](#)

Code R, assurance de titre, enchère d'un acheteur neutre

Python

R

```
valeur <- 300000; p_probleme <- 1 / 20
enchere <- (1 - p_probleme) * valeur + p_probleme * 0
cat("enchère maximale d'un acheteur neutre au risque :", enchere, "dollars\n")
cat("perte espérée sans assurance :", p_probleme * valeur, " frais d'assurance : 1 500\n")
```

[◀ Retour](#)

```
import numpy as np
profit = {"commander 50": np.array([5000, 5000]),          # ventes de 50, ventes de 100
         "commander 100": np.array([1500, 12000])}
pi = np.array([0.5, 0.5])
for nom, x in profit.items():
    print(f"{nom:14s} profit espéré = {(pi * x).sum():.0f}")
info = (pi * np.array([5000, 12000])).sum()                # on commande juste dans chaque état
print("avec information complète :", info, "   valeur de l'information :", info - 6750)
```

```
profit <- list("commander 50" = c(5000, 5000),           # ventes de 50, ventes de 100
              "commander 100" = c(1500, 12000))
pi <- c(0.5, 0.5)
for (nom in names(profit))
  cat(sprintf("%-14s profit espéré = %.0f\n", nom, sum(pi * profit[[nom]])))
info <- sum(pi * c(5000, 12000))                        # on commande juste dans chaque état
cat("avec information complète :", info, "  valeur de l'information :", info - 6750, "\n")
```

```
actifs = {"obligation": (1000, 1000, 100),           # (prix début, prix fin, flux)
          "immeuble (millions)": (10, 11, 0.5),
          "action GM": (80, 72, 4)}

inflation = 0.05
for nom, (p0, p1, flux) in actifs.items():
    r = (p1 - p0 + flux) / p0
    print(f"{nom:20s} rendement = {r:6.1%}    rendement réel = {r - inflation:6.1%}")
```

```
actifs <- list("obligation" = c(1000, 1000, 100),      # (prix début, prix fin, flux)
              "immeuble (millions)" = c(10, 11, 0.5),
              "action GM" = c(80, 72, 4))

inflation <- 0.05
for (nom in names(actifs)) {
  a <- actifs[[nom]]; r <- (a[2] - a[1] + a[3]) / a[1]
  cat(sprintf("%-20s rendement = %5.1f%%    rendement réel = %5.1f%%\n",
              nom, 100 * r, 100 * (r - inflation)))
}
```

```
import pandas as pd
t = pd.DataFrame({"rendement moyen": [11.9, 6.2, 3.7],
                  "rendement réel moyen": [8.7, 3.3, 0.7],
                  "écart-type": [20.4, 8.3, 3.1]},
                  index=["actions (S&P 500)", "obligations d'entreprise", "bons du Trésor"])
print(t)
ex = t["rendement réel moyen"] - t.loc["bons du Trésor", "rendement réel moyen"]
print("supplément de rendement réel sur les bons du Trésor :")
print(ex.round(1).to_string())
```

```
t <- data.frame("rendement moyen" = c(11.9, 6.2, 3.7),
               "rendement réel moyen" = c(8.7, 3.3, 0.7),
               "écart-type" = c(20.4, 8.3, 3.1), check.names = FALSE,
               row.names = c("actions (S&P 500)", "obligations d'entreprise",
                             "bons du Trésor"))

print(t)
cat("supplément de rendement réel sur les bons du Trésor :\n")
ex <- round(t[["rendement réel moyen"]] - t["bons du Trésor", "rendement réel moyen"], 1)
cat(paste(rownames(t), format(ex, nsmall = 1)), sep = "\n")
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
w = 100                                # richesse, u = ln
x = np.linspace(0, 60, 300)           # montant investi
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8.0, 2.8))
for ax, (rg, rb, titre) in zip(axs, ((0.3, -0.5, "A. rendement espéré -0,1"),
                                      (0.5, -0.4, "B. rendement espéré +0,05"))):
    EU = 0.5 * np.log(w + x * rg) + 0.5 * np.log(w + x * rb)
    xs = max(0, -w * (rg + rb) / (2 * rg * rb)) # condition du premier ordre
    print(titre, ": x* =", round(xs, 2))
    ax.plot(x, EU, color="#1F4E79", lw=2)
    ax.plot(xs, 0.5 * np.log(w + xs * rg) + 0.5 * np.log(w + xs * rb), "o", color="#C0502B")
    ax.set_title(titre, fontsize=10); ax.set_xlabel("Montant investi x")
    ax.set_yticks([]); ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
axs[0].set_ylabel("Utilité espérée")
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_premier_euro.pdf"); plt.show()
```

```
w <- 100                                # richesse, u = ln
x <- seq(0, 60, length.out = 300)       # montant investi
par(mfrow = c(1, 2))
for (cas in list(list(0.3, -0.5, "A. rendement espéré -0,1"),
                  list(0.5, -0.4, "B. rendement espéré +0,05"))) {
  rg <- cas[[1]]; rb <- cas[[2]]
  EU <- 0.5 * log(w + x * rg) + 0.5 * log(w + x * rb)
  xs <- max(0, -w * (rg + rb) / (2 * rg * rb)) # condition du premier ordre
  cat(cas[[3]], ": x* =", round(xs, 2), "\n")
  plot(x, EU, type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79", yaxt = "n", bty = "l", main = cas[[3]],
       xlab = "Montant investi x", ylab = "Utilité espérée")
  points(xs, 0.5 * log(w + xs * rg) + 0.5 * log(w + xs * rb), pch = 19, col = "#C0502B")
}
par(mfrow = c(1, 1))
```

Code Python, rendement et risque du portefeuille

Python

R

```
rf, rm, sm, x = 0.04, 0.12, 0.20, 0.5          # sigma_m = 20 % est une hypothèse  
print(f"r_x = {100 * (x * rm + (1 - x) * rf):.1f} %    sigma_x = {100 * x * sm:.1f} %")
```

[◀ Retour](#)

Code R, rendement et risque du portefeuille

Python

R

```
rf <- 0.04; rm <- 0.12; sm <- 0.20; x <- 0.5      # sigma_m = 20 % est une hypothèse  
cat(sprintf("r_x = %.1f %%    sigma_x = %.1f %%\n",  
            100 * (x * rm + (1 - x) * rf), 100 * x * sm))
```

[◀ Retour](#)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
rf, rm, sm = 4, 12, 20                                # en %, sigma_m = 20 est une hypothèse
p = (rm - rf) / sm                                     # prix du risque
print("prix du risque p =", p)
for x in (0, 0.5, 1, 1.5):
    print(f"x = {x:3.1f}  r_x = {x * rm + (1 - x) * rf:5.1f} %  sigma_x = {x * sm:5.1f} %")
s = np.linspace(0, 32, 100)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.4, 3.1))
ax.plot(s, rf + p * s, color="#1F4E79", lw=2)
ax.plot([0, 10, 20, 30], [4, 8, 12, 16], "o", color="#1F4E79")
for sx, rx, t in ((0, 4, "0"), (10, 8, "0,5"), (20, 12, "1"), (30, 16, "1,5")):
    ax.annotate("x = " + t, (sx, rx), (sx + 0.8, rx - 1.6), fontsize=9)
ax.set_xlabel("Écart-type du rendement (%)"); ax.set_ylabel("Rendement espéré (%)")
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_droite_budget.pdf"); plt.show()
```

```
rf <- 4; rm <- 12; sm <- 20                                # en %, sigma_m = 20 est une hypothèse
p <- (rm - rf) / sm                                         # prix du risque
cat("prix du risque p =", p, "\n")
for (x in c(0, 0.5, 1, 1.5))
  cat(sprintf("x = %3.1f  r_x = %5.1f %%  sigma_x = %5.1f %%\n",
    x, x * rm + (1 - x) * rf, x * sm))
s <- seq(0, 32, length.out = 100)
plot(s, rf + p * s, type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79", bty = "l",
  xlab = "Écart-type du rendement (%)", ylab = "Rendement espéré (%)")
points(c(0, 10, 20, 30), c(4, 8, 12, 16), pch = 19, col = "#1F4E79")
text(c(0, 10, 20, 30), c(4, 8, 12, 16), paste("x =", c("0", "0,5", "1", "1,5")),
  pos = 4, cex = 0.8)
```

Code Python, part optimale de l'actif risqué

Python

R

```
rf, rm, sm = 0.04, 0.12, 0.20
for a in (1, 2, 4, 8):
    print(f"a = {a}    x* = {(rm - rf) / (a * sm ** 2):.3f}")
```

[◀ Retour](#)

Code R, part optimale de l'actif risqué

Python

R

```
rf <- 0.04; rm <- 0.12; sm <- 0.20  
for (a in c(1, 2, 4, 8)) cat(sprintf("a = %d    x* = %.3f\n", a, (rm - rf) / (a * sm^2)))
```

[◀ Retour](#)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
rf, rm, sm = 0.04, 0.12, 0.20
s = np.linspace(0, 0.5, 200)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.4, 3.3))
ax.plot(100 * s, 100 * (rf + (rm - rf) / sm * s), color="#1F4E79", lw=2)
for a, nom, col in ((4, "A", "#8C8C8C"), (1, "B", "#C0502B")):
    x = (rm - rf) / (a * sm ** 2)           # part optimale de l'actif risqué
    r, sig = rf + x * (rm - rf), x * sm
    U = r - a / 2 * sig ** 2                # utilité atteinte
    print(f"investisseur {nom} (a = {a}) : x* = {x:.2f}  r = {100 * r:.1f} %"
          f"  sigma = {100 * sig:.1f} %")
    ax.plot(100 * s, 100 * (U + a / 2 * s ** 2), color=col, lw=1.4)
    ax.plot(100 * sig, 100 * r, "o", color=col); ax.text(100 * sig + 1, 100 * r - 1.6, nom)
ax.plot(20, 12, "s", color="#1F4E79"); ax.text(20.8, 11.2, "marché", fontsize=9)
ax.set_xlim(0, 50); ax.set_ylim(0, 30)
ax.set_xlabel("Écart-type du rendement (%"); ax.set_ylabel("Rendement espéré (%)")
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_deux_investisseurs.pdf"); plt.show()
```

```
rf <- 0.04; rm <- 0.12; sm <- 0.20
s <- seq(0, 0.5, length.out = 200)
plot(100 * s, 100 * (rf + (rm - rf) / sm * s), type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79",
     xlim = c(0, 50), ylim = c(0, 30), bty = "l",
     xlab = "Écart-type du rendement (%)", ylab = "Rendement espéré (%)")
for (cas in list(list(4, "A", "#8C8C8C"), list(1, "B", "#C0502B"))) {
  a <- cas[[1]]
  x <- (rm - rf) / (a * sm^2)                # part optimale de l'actif risqué
  r <- rf + x * (rm - rf); sig <- x * sm
  U <- r - a / 2 * sig^2                     # utilité atteinte
  cat(sprintf("investisseur %s (a = %d) : x* = %.2f  r = %.1f %%  sigma = %.1f %%\n",
              cas[[2]], a, x, 100 * r, 100 * sig))
  lines(100 * s, 100 * (U + a / 2 * s^2), col = cas[[3]], lwd = 1.4)
  points(100 * sig, 100 * r, pch = 19, col = cas[[3]])
  text(100 * sig, 100 * r, cas[[2]], pos = 4)
}
points(20, 12, pch = 15, col = "#1F4E79"); text(20, 12, "marché", pos = 4, cex = 0.8)
```

Code Python, probabilité d'une forte perte annuelle

Python

R

```
from scipy.stats import norm                # rendements supposés normaux
for nom, r, s in (("A", 0.08, 0.10), ("B", 0.20, 0.40)):
    print(f"{nom} : P(rendement < -40 %) = {norm.cdf((-0.40 - r) / s):.4f}")
```

[◀ Retour](#)

Code R, probabilité d'une forte perte annuelle

Python

R

```
cas <- list(A = c(0.08, 0.10), B = c(0.20, 0.40))    # rendements supposés normaux
for (nom in names(cas)) {
  z_ <- (-0.40 - cas[[nom]][1]) / cas[[nom]][2]
  cat(sprintf("%s : P(rendement < -40 %) = %.4f\n", nom, pnorm(z_)))
}
```

[◀ Retour](#)

```
import numpy as np
rf, a = 0.04, 5                                # actif sûr, aversion au risque
actifs = {"X": (0.08, 0.10), "Y": (0.14, 0.20)} # (rendement espéré, écart-type)
for nom, (r, s) in actifs.items():
    tout = r - a / 2 * s ** 2                  # tout placer dans l'actif risqué
    x = (r - rf) / (a * s ** 2)               # meilleur mélange avec l'actif sûr
    melange = rf + x * (r - rf) - a / 2 * (x * s) ** 2
    print(f"{nom} : prix du risque = {(r - rf) / s:.2f} U(tout) = {tout:.4f}"
          f" x* = {x:.2f} U(mélange) = {melange:.4f}")
```

```
rf <- 0.04; a <- 5                                # actif sûr, aversion au risque
actifs <- list(X = c(0.08, 0.10), Y = c(0.14, 0.20)) # (rendement espéré, écart-type)
for (nom in names(actifs)) {
  r <- actifs[[nom]][1]; s <- actifs[[nom]][2]
  tout <- r - a / 2 * s^2                        # tout placer dans l'actif risqué
  x <- (r - rf) / (a * s^2)                     # meilleur mélange avec l'actif sûr
  melange <- rf + x * (r - rf) - a / 2 * (x * s)^2
  cat(sprintf("%s : prix du risque = %.2f  U(tout) = %.4f  x* = %.2f  U(mélange) = %.4f\n",
    nom, (r - rf) / s, tout, x, melange))
}
```

Code Python, deux actifs corrélés négativement

Python

R

```
import numpy as np
pi = np.array([0.5, 0.5])
A, B = np.array([10, -5]), np.array([-5, 10])      # valeurs dans les deux états
for nom, X in (("A seul", A), ("B seul", B), ("A et B", A + B)):
    E = (pi * X).sum()
    s = np.sqrt((pi * (X - E) ** 2).sum())
    print(f"{nom:7s} valeurs = {X}  espérance = {E:5.2f}  écart-type = {s:.2f}")
```

[◀ Retour](#)

Code R, deux actifs corrélés négativement

Python

R

```
pi <- c(0.5, 0.5)
A <- c(10, -5); B <- c(-5, 10) # valeurs dans les deux états
cas <- list("A seul" = A, "B seul" = B, "A et B" = A + B)
for (nom in names(cas)) {
  X <- cas[[nom]]; E <- sum(pi * X)
  cat(sprintf("%-7s valeurs = %s  espérance = %5.2f  écart-type = %.2f\n", nom,
    paste(X, collapse = " "), E, sqrt(sum(pi * (X - E)^2))))
}
```

◀ Retour

```
import numpy as np
rm = np.array([-10, 0, 10, 20])          # marché (%), 4 états équiprobables
actifs = {"D": np.array([-2, -1, 4, 13]),
          "C": np.array([-13, -4, 11, 32]),
          "Z": np.array([12, -8, -8, 12])}
cov = lambda x, y: ((x - x.mean()) * (y - y.mean())).mean()
print(f"marché : moyenne = {rm.mean():.1f}   écart-type = {np.sqrt(cov(rm, rm)):.2f}")
for nom, r in actifs.items():
    print(f"{nom} : moyenne = {r.mean():5.2f}   écart-type = {np.sqrt(cov(r, r)):6.2f}"
          f"   bêta = cov/var = {cov(r, rm) / cov(rm, rm):.2f}")
```

```
rm <- c(-10, 0, 10, 20) # marché (%), 4 états équiprobables
actifs <- list(D = c(-2, -1, 4, 13), C = c(-13, -4, 11, 32), Z = c(12, -8, -8, 12))
covp <- function(x, y) mean((x - mean(x)) * (y - mean(y))) # covariance (division par 4)
cat(sprintf("marché : moyenne = %.1f écart-type = %.2f\n", mean(rm), sqrt(covp(rm, rm))))
for (nom in names(actifs)) {
  r <- actifs[[nom]]
  cat(sprintf("%s : moyenne = %5.2f écart-type = %6.2f bêta = cov/var = %.2f\n",
    nom, mean(r), sqrt(covp(r, r)), covp(r, rm) / covp(rm, rm)))
}
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
rf, rm = 2, 5                                # en %
b = np.linspace(0, 2, 50)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.4, 3.1))
ax.plot(b, rf + b * (rm - rf), color="#1F4E79", lw=2)
for beta, r, nom in ((0, 2, "Z"), (0.5, 3.5, "D"), (1, 5, "M"), (1.5, 6.5, "C")):
    ax.plot(beta, r, "o", color="#1F4E79"); ax.text(beta + 0.04, r - 0.55, nom)
ax.plot(1, 7, "o", color="#C0502B"); ax.text(1.05, 7.1, "S", color="#C0502B")
ax.annotate("", (1, 5.2), (1, 6.8), arrowprops=dict(arrowstyle="->", color="#C0502B"))
ax.set_xlabel("Bêta"); ax.set_ylabel("Rendement espéré (%)")
ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:g}".replace(".", ","))
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_droite_marche.pdf"); plt.show()
for beta in (0, 0.5, 1, 1.5):
    print(f"bêta = {beta:3.1f}   rendement d'équilibre = {rf + beta * (rm - rf):.1f} %")
```

```
rf <- 2; rm <- 5                                # en %
b <- seq(0, 2, length.out = 50)
plot(b, rf + b * (rm - rf), type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79", bty = "l",
     xlab = "Bêta", ylab = "Rendement espéré (%)", ylim = c(1.5, 8))
points(c(0, 0.5, 1, 1.5), c(2, 3.5, 5, 6.5), pch = 19, col = "#1F4E79")
text(c(0, 0.5, 1, 1.5), c(2, 3.5, 5, 6.5), c("Z", "D", "M", "C"), pos = 4)
points(1, 7, pch = 19, col = "#C0502B"); text(1, 7, "S", pos = 4, col = "#C0502B")
arrows(1, 6.8, 1, 5.2, length = 0.08, col = "#C0502B")
for (beta in c(0, 0.5, 1, 1.5))
  cat(sprintf("bêta = %3.1f   rendement d'équilibre = %.1f %%\n",
             beta, rf + beta * (rm - rf)))
```

Code Python, comment le prix s'ajuste

Python

R

```
rf, rm, beta = 0.02, 0.05, 1.0
p1 = 107                                     # prix attendu dans un an (euros)
r_requis = rf + beta * (rm - rf)
print(f"rendement requis = {r_requis:.1%}")
print(f"au prix de 100 euros, rendement espéré = {(p1 - 100) / 100:.1%}")
print(f"prix d'équilibre = {p1 / (1 + r_requis):.2f} euros")
```

[◀ Retour](#)

Code R, comment le prix s'ajuste

Python

R

```
rf <- 0.02; rm <- 0.05; beta <- 1.0
p1 <- 107                                     # prix attendu dans un an (euros)
r_requis <- rf + beta * (rm - rf)
cat(sprintf("rendement requis = %.1f%%\n", 100 * r_requis))
cat(sprintf("au prix de 100 euros, rendement espéré = %.1f%%\n", 100 * (p1 - 100) / 100))
cat(sprintf("prix d'équilibre = %.2f euros\n", p1 / (1 + r_requis)))
```

[◀ Retour](#)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x, y, z, u = 2026, 10, 9, [] # Wichmann et Hill, graine fixée
for k in range(60):
    x, y, z = 171 * x % 30269, 172 * y % 30307, 170 * z % 30323
    u.append((x / 30269 + y / 30307 + z / 30323) % 1)
u = np.array(u)
rf, rm = 2, 6 # en %
beta = 0.6 + 0.8 * u[:30] # 30 fonds fictifs
r = rf + beta * (rm - rf) - 1.2 + 3 * (u[30:] - 0.5) # frais et hasard
print("fonds sous la droite :", (r < rf + beta * (rm - rf)).sum(), "sur 30")
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.4, 3.0))
ax.plot([0, 1.6], [rf, rf + 1.6 * (rm - rf)], color="#1F4E79", lw=2)
ax.plot(beta, r, "o", color="#8C8C8C", ms=4); ax.plot(1, rm, "s", color="#C0502B")
ax.text(1.03, rm - 0.6, "fonds indiciel", color="#C0502B", fontsize=9)
ax.set_xlabel("Bêta"); ax.set_ylabel("Rendement moyen (%)")
ax.xaxis.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:g}".replace(".", ","))
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_fonds.pdf"); plt.show()
```

```
x <- 2026; y <- 10; z <- 9; u <- numeric(60)      # Wichmann et Hill, graine fixée
for (k in 1:60) {
  x <- (171 * x) %% 30269; y <- (172 * y) %% 30307; z <- (170 * z) %% 30323
  u[k] <- (x / 30269 + y / 30307 + z / 30323) %% 1
}
rf <- 2; rm <- 6                                # en %
beta <- 0.6 + 0.8 * u[1:30]                      # 30 fonds fictifs
r <- rf + beta * (rm - rf) - 1.2 + 3 * (u[31:60] - 0.5) # frais et hasard
cat("fonds sous la droite :", sum(r < rf + beta * (rm - rf)), "sur 30\n")
plot(beta, r, pch = 19, col = "#8C8C8C", xlim = c(0, 1.6), ylim = c(1.5, 8.6), bty = "l",
      xlab = "Bêta", ylab = "Rendement moyen (%)")
lines(c(0, 1.6), c(rf, rf + 1.6 * (rm - rf)), lwd = 2, col = "#1F4E79")
points(1, rm, pch = 15, col = "#C0502B")
text(1, rm, "fonds indiciel", pos = 4, col = "#C0502B")
```

Code Python, probabilité d'une cascade erronée

Python

R

```
for q in (0.6, 0.7, 0.8):  
    print(f"q = {q}    P(cascade erronée) = {(1 - q) ** 2 / (q ** 2 + (1 - q) ** 2):.4f}")
```

[◀ Retour](#)

Code R, probabilité d'une cascade erronée

Python

R

```
for (q in c(0.6, 0.7, 0.8))  
  cat(sprintf("q = %.1f    P(cascade erronée) = %.4f\n", q, (1 - q)^2 / (q^2 + (1 - q)^2)))
```

◀ Retour

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x, y, z, freq = 2026, 10, 9, []
Q = (0.55, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9)
for qq in Q:
    erreurs = 0
    for s in range(10000):
        d = 0
        for i in range(20):
            x, y, z = 171 * x % 30269, 172 * y % 30307, 170 * z % 30323
            u = (x / 30269 + y / 30307 + z / 30323) % 1
            s_ = 1 if u < qq else -1
            choix = s_ if abs(d) < 2 else (1 if d > 0 else -1)
            d = d + s_
        erreurs += choix < 0
    freq.append(erreurs / 10000)
    print(f"q = {qq:.2f} simulation = {freq[-1]:.4f} théorie = {(1 - qq) ** 2 / (qq ** 2 + (1 - qq) ** 2):.4f}")
q = np.linspace(0.5, 1, 101); fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.4, 3.0))
ax.plot(q, (1 - q) ** 2 / (q ** 2 + (1 - q) ** 2), color="#1F4E79", lw=2, label="théorie")
ax.plot(Q, freq, "o", color="#C0502B", label="simulation")
ax.set(xlabel="Précision du signal privé q", ylabel="Proba. de cascade erronée")
for a in (ax.xaxis, ax.yaxis): a.set_major_formatter(lambda v, p: f"{v:g}".replace(".", ","))
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False); ax.legend(frameon=False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_cascade.pdf"); plt.show()
```

```
q <- seq(0.5, 1, length.out = 101)
faux <- (1 - q)^2 / (q^2 + (1 - q)^2)      # probabilité de cascade erronée
x <- 2026; y <- 10; z <- 9; freq <- c()      # Wichmann et Hill, graine fixée
for (qq in c(0.55, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9)) {
  erreurs <- 0
  for (s in 1:10000) {                      # 10 000 files de 20 personnes
    d <- 0                                  # avance de A parmi les signaux révélés
    for (i in 1:20) {
      x <- (171 * x) %% 30269; y <- (172 * y) %% 30307; z <- (170 * z) %% 30323
      u <- (x / 30269 + y / 30307 + z / 30323) %% 1
      s_ <- ifelse(u < qq, 1, -1)           # signal, +1 pour A (le bon choix)
      choix <- if (abs(d) < 2) s_ else sign(d) # au-delà de 2, on imite
      if (abs(d) < 2) d <- d + s_
    }
    erreurs <- erreurs + (choix < 0)        # la dernière personne choisit B
  }
  freq <- c(freq, erreurs / 10000)
  cat(sprintf("q = %.2f  simulation = %.4f  théorie = %.4f\n", qq, erreurs / 10000,
    (1 - qq)^2 / (qq^2 + (1 - qq)^2)))
}
plot(q, faux, type = "l", lwd = 2, col = "#1F4E79", bty = "l",
      xlab = "Précision du signal privé q", ylab = "Proba. de cascade erronée")
points(c(0.55, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9), freq, pch = 19, col = "#C0502B")
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
P = np.linspace(0, 50, 100)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.0, 3.2))
ax.plot(100 - 2 * P, P, color="#8C8C8C", lw=2)                # D1, temps normal
ax.plot([160, 110, 0], [0, 25, 30], color="#1F4E79", lw=2)   # D2, après la tempête
ax.text(5, 46, "D1", color="#8C8C8C"); ax.text(4, 31.5, "D2", color="#1F4E79")
for p in (20, 25, 40):
    ax.axhline(p, color="#8C8C8C", lw=0.6, ls=":")
ax.plot([60, 120], [20, 20], "o", color="#C0502B")
ax.text(61, 21, "Q1", fontsize=9); ax.text(121, 21, "Q2", fontsize=9)
ax.set_yticks([20, 25, 40]); ax.set_xticks([])
ax.set_xlabel("Quantité de pelles"); ax.set_ylabel("Prix (dollars)")
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
fig.tight_layout(); fig.savefig("fig_pelles.pdf"); plt.show()
```

```
P <- seq(0, 50, length.out = 100)
plot(100 - 2 * P, P, type = "l", lwd = 2, col = "#8C8C8C", xlim = c(0, 165),
     ylim = c(0, 50), xaxt = "n", yaxt = "n", bty = "l",
     xlab = "Quantité de pelles", ylab = "Prix (dollars)")
lines(c(160, 110, 0), c(0, 25, 30), lwd = 2, col = "#1F4E79")           # D2, après la tempête
abline(h = c(20, 25, 40), lty = 3, col = "#8C8C8C"); axis(2, at = c(20, 25, 40), las = 1)
points(c(60, 120), c(20, 20), pch = 19, col = "#C0502B")
text(c(60, 120), c(20, 20), c("Q1", "Q2"), pos = 3)
text(c(5, 4), c(46, 31.5), c("D1", "D2"))
```

Code Python, exemple alternatif, action de biotechnologie

Python

R

```
print("espérance du cours :", round(0.3 * 80 + 0.7 * 35, 2), "euros")
```

[◀ Retour](#)

Code R, exemple alternatif, action de biotechnologie

Python

R

```
cat("espérance du cours :", round(0.3 * 80 + 0.7 * 35, 2), "euros\n")
```

[◀ Retour](#)

```
import numpy as np
emplois = {"A": ([0.5, 0.5], [1800, 1000]), "B": ([0.9, 0.1], [1500, 500]),
           "A + 100": ([0.5, 0.5], [1900, 1100])}
for nom, (pi, X) in emplois.items():
    pi, X = np.array(pi), np.array(X)
    E = (pi * X).sum(); V = (pi * (X - E) ** 2).sum()
    print(f"{nom:8s} E = {E:.0f}  variance = {V:.0f}  écart-type = {np.sqrt(V):.0f}")
```

Code R, exemple alternatif, deux emplois étudiants

Python

R

```
emplois <- list("A" = list(c(0.5, 0.5), c(1800, 1000)),
               "B" = list(c(0.9, 0.1), c(1500, 500)),
               "A + 100" = list(c(0.5, 0.5), c(1900, 1100)))
for (nom in names(emplois)) {
  pi <- emplois[[nom]][[1]]; X <- emplois[[nom]][[2]]
  E <- sum(pi * X); V <- sum(pi * (X - E)^2)
  cat(sprintf("%-8s E = %.0f  variance = %.0f  écart-type = %.0f\n", nom, E, V, sqrt(V)))
}
```

◀ Retour

Code Python, exemple alternatif, fraude dans les transports

Python

R

```
for p, amende in ((0.05, 30), (0.05, 50), (0.02, 50), (0.02, 120)):  
    print(f"p = {p}   amende = {amende}   espérée = {p * amende:.2f}   seuil = {2 / p:.0f}")
```

◀ Retour

Code R, exemple alternatif, fraude dans les transports

Python

R

```
p <- c(0.05, 0.05, 0.02, 0.02); amende <- c(30, 50, 50, 120)
for (k in 1:4) cat(sprintf("p = %.2f  amende = %d  amende espérée = %.2f  seuil = %.0f\n",
                           p[k], amende[k], p[k] * amende[k], 2 / p[k]))
```

[◀ Retour](#)

Code Python, exemple alternatif, jeu à gratter

Python

R

```
richesse, prix, gain = 50, 2, 100  
print("avec ticket : gagnant", richesse - prix + gain, " perdant", richesse - prix)
```

◀ Retour

Code R, exemple alternatif, jeu à gratter

Python

R

```
richesse <- 50; prix <- 2; gain <- 100  
cat("avec ticket : gagnant", richesse - prix + gain, " perdant", richesse - prix, "\n")
```

[◀ Retour](#)

Code Python, exemple alternatif, le pari de Varian

Python

R

```
import numpy as np
EU = 0.5 * np.sqrt(5) + 0.5 * np.sqrt(15)
print(f"racine : EU = {EU:.3f}  u(10) = {np.sqrt(10):.3f}  EC = {EU ** 2:.2f}"
      f"  rho = {10 - EU ** 2:.2f}")
print("carré : EU =", 0.5 * 25 + 0.5 * 225, " u(10) =", 100)
```

[◀ Retour](#)

Code R, exemple alternatif, le pari de Varian

Python

R

```
EU <- 0.5 * sqrt(5) + 0.5 * sqrt(15)
cat(sprintf("racine : EU = %.3f  u(10) = %.3f  EC = %.2f  rho = %.2f\n",
           EU, sqrt(10), EU^2, 10 - EU^2))
cat("carré : EU =", 0.5 * 25 + 0.5 * 225, " u(10) =", 100, "\n")
```

[◀ Retour](#)

Code Python, exemple alternatif, CDD ou indépendant

Python

R

```
import numpy as np
for bas, haut in ((1000, 3000), (0, 4000)):
    EU = 0.5 * np.sqrt(bas) + 0.5 * np.sqrt(haut)
    print(f"{bas} ou {haut} : EU = {EU:.2f}    EC = {EU ** 2:.0f}"
          f"    rho = {2000 - EU ** 2:.0f}")
```

[◀ Retour](#)

Code R, exemple alternatif, CDD ou indépendant

Python

R

```
for (cas in list(c(1000, 3000), c(0, 4000))) {  
  EU <- 0.5 * sqrt(cas[1]) + 0.5 * sqrt(cas[2])  
  cat(sprintf("%d ou %d : EU = %.2f  EC = %.0f  rho = %.0f\n",  
    cas[1], cas[2], EU, EU^2, 2000 - EU^2))  
}
```

[◀ Retour](#)

```
pluie, soleil = (20, 5), (5, 20)           # valeur d'une action (pluie, soleil)
parts = {"imperméables": (10, 0), "lunettes": (0, 10), "moitié-moitié": (5, 5)}
for nom, (a, b) in parts.items():
    v = [a * pluie[k] + b * soleil[k] for k in range(2)]
    print(f"{nom:14s} valeur = {v}  espérance = {0.5 * v[0] + 0.5 * v[1]}")
```

Code R, exemple alternatif, lunettes et imperméables

Python

R

```
pluie <- c(20, 5); soleil <- c(5, 20)           # valeur d'une action (pluie, soleil)
parts <- list("imperméables" = c(10, 0), "lunettes" = c(0, 10),
             "moitié-moitié" = c(5, 5))
for (nom in names(parts)) {
  v <- parts[[nom]][1] * pluie + parts[[nom]][2] * soleil
  cat(nom, ": valeur =", v, " espérance =", mean(v), "\n")
}
```

[← Retour](#)

Code Python, exemple alternatif, l'assurance selon Varian

Python

R

```
W, perte, pi = 35000, 10000, 0.01
print("sans assurance : E =", round((1 - pi) * W + pi * (W - perte), 2))
print("assurance de 10 000, prime 100 :", W - 100, "dans les deux états")
print("1 000 ménages : sinistres attendus =", 1000 * pi,
      " coût moyen par ménage =", 1000 * pi * perte / 1000)
```

[← Retour](#)

Code R, exemple alternatif, l'assurance selon Varian

Python

R

```
W <- 35000; perte <- 10000; pi <- 0.01
cat("sans assurance : E =", round((1 - pi) * W + pi * (W - perte), 2), "\n")
cat("assurance de 10 000, prime 100 :", W - 100, "dans les deux états\n")
cat("1 000 ménages : sinistres attendus =", 1000 * pi,
    " coût moyen par ménage =", 1000 * pi * perte / 1000, "\n")
```

[← Retour](#)

Code Python, exemple alternatif, scooter d'occasion

Python

R

```
print("offre maximale d'une acheteuse neutre :", round(0.95 * 3000, 2), "euros")
```

[◀ Retour](#)

Code R, exemple alternatif, scooter d'occasion

Python

R

```
cat("offre maximale d'une acheteuse neutre :", round(0.95 * 3000, 2), "euros\n")
```

[◀ Retour](#)

```
prix, rachat = 3, 0.40
p200 = [3 * 200 - 1.2 * 200] * 2 # commander 200 (demande 200, 400)
p400 = [3 * 200 + rachat * 200 - 400, 3 * 400 - 400] # commander 400
print("commander 200 :", p200, " espérance =", round(sum(p200) / 2, 2))
print("commander 400 :", p400, " espérance =", round(sum(p400) / 2, 2))
info = 0.5 * 360 + 0.5 * 800
print("information parfaite :", info, " valeur =", round(info - 540, 2))
```

```
rachat <- 0.40
p200 <- rep(3 * 200 - 1.2 * 200, 2) # commander 200 (demande 200, 400)
p400 <- c(3 * 200 + rachat * 200 - 400, 3 * 400 - 400) # commander 400
cat("commander 200 :", p200, " espérance =", round(mean(p200), 2), "\n")
cat("commander 400 :", p400, " espérance =", round(mean(p400), 2), "\n")
info <- 0.5 * 360 + 0.5 * 800
cat("information parfaite :", info, " valeur =", round(info - 540, 2), "\n")
```

Code Python, exemple alternatif, trois placements

Python

R

```
actifs = {"livret": (1000, 1000, 30), "appartement": (200000, 206000, 8000),  
          "action": (40, 36, 1.2)}          # (prix début, prix fin, flux)  
for nom, (p0, p1, flux) in actifs.items():  
    r = (p1 - p0 + flux) / p0  
    print(f"{nom:12s} rendement = {100 * r:5.1f} %    réel = {100 * (r - 0.02):5.1f} %")
```

[◀ Retour](#)

Code R, exemple alternatif, trois placements

Python

R

```
actifs <- list(livret = c(1000, 1000, 30), appartement = c(200000, 206000, 8000),
              action = c(40, 36, 1.2))           # (prix début, prix fin, flux)
for (nom in names(actifs)) {
  a <- actifs[[nom]]; r <- (a[2] - a[1] + a[3]) / a[1]
  cat(sprintf("%-12s rendement = %5.1f %%    réel = %5.1f %%\n",
              nom, 100 * r, 100 * (r - 0.02)))
}
```

[◀ Retour](#)

```
rf, rm, sm = 0.03, 0.08, 0.15
print(f"prix du risque = {(rm - rf) / sm:.4f}")
print(f"x = 0,4 : r = {100 * (rf + 0.4 * (rm - rf)):.1f} %   sigma = {100 * 0.4 * sm:.1f} %")
for a in (5, 2):
    print(f"a = {a}    x* = {(rm - rf) / (a * sm ** 2):.2f}")
```

Code R, exemple alternatif, livret et fonds indiciel

Python

R

```
rf <- 0.03; rm <- 0.08; sm <- 0.15
cat(sprintf("prix du risque = %.4f    x = 0,4 : r = %.1f %%    sigma = %.1f %%\n",
            (rm - rf) / sm, 100 * (rf + 0.4 * (rm - rf)), 100 * 0.4 * sm))
for (a in c(5, 2)) cat(sprintf("a = %d    x* = %.2f\n", a, (rm - rf) / (a * sm^2)))
```

[◀ Retour](#)

```
import numpy as np
parts = {"vélos": [12, -4], "cinéma": [-4, 12], "les deux": [8, 8]} # soleil, pluie
for nom, X in parts.items():
    X = np.array(X); E = X.mean()
    print(f"{nom:9s} espérance = {E:.0f}   écart-type = {np.sqrt(((X - E) ** 2).mean()):.0f}")
```

Code R, exemple alternatif, vélos et cinéma

Python

R

```
cas <- list("vélos" = c(12, -4), "cinéma" = c(-4, 12), "les deux" = c(8, 8))
for (nom in names(cas)) {
  X <- cas[[nom]]; E <- mean(X)
  cat(sprintf("%-9s espérance = %.0f  écart-type = %.0f\n", nom, E, sqrt(mean((X - E)^2))))
}
```

[◀ Retour](#)

Code Python, exemple alternatif, fonds géré et fonds indiciel

Python

R

```
rf, rm, beta = 2.5, 6.5, 1.2
print(f"fonds indiciel à {100 * beta:.0f} % : rendement = {rf + beta * (rm - rf):.1f} %")
print("fonds géré : rendement = 7 %")
```

[◀ Retour](#)

Code R, exemple alternatif, fonds géré et fonds indiciel

Python

R

```
rf <- 2.5; rm <- 6.5; beta <- 1.2  
cat(sprintf("fonds indiciel à %.0f %% : rendement = %.1f %%\n",  
            100 * beta, rf + beta * (rm - rf)))  
cat("fonds géré : rendement = 7 %\n")
```

[◀ Retour](#)

Code Python, exemple alternatif, rendement locatif

Python

R

```
for prix in (120000, 200000):  
    print(f"prix = {prix}    rendement locatif = {100 * 6000 / prix:.1f} %")
```

Code R, exemple alternatif, rendement locatif

Python

R

```
for (prix in c(120000, 200000))  
  cat(sprintf("prix = %d    rendement locatif = %.1f %%\n", prix, 100 * 6000 / prix))
```

[◀ Retour](#)

Code Python, exemple alternatif, deux bouchons lyonnais

Python

R

```
q = 0.7  
print("deux premiers avis faux :", round((1 - q) ** 2, 4))  
print("cascade sur B :", round((1 - q) ** 2 / (q ** 2 + (1 - q) ** 2), 4))
```

◀ Retour

Code R, exemple alternatif, deux bouchons lyonnais

Python

R

```
q <- 0.7  
cat("deux premiers avis faux :", round((1 - q)^2, 4), "\n")  
cat("cascade sur B :", round((1 - q)^2 / (q^2 + (1 - q)^2), 4), "\n")
```

Code Python, exemple alternatif, chauffeur de VTC

Python

R

```
for gain_horaire in (40, 20):  
    print(f"gain horaire {gain_horaire} : heures pour gagner 200 = {200 / gain_horaire:.0f}")
```

◀ Retour

Code R, exemple alternatif, chauffeur de VTC

Python

R

```
for (gain_horaire in c(40, 20))  
  cat(sprintf("gain horaire %d : heures pour gagner 200 = %.0f\n",  
    gain_horaire, 200 / gain_horaire))
```

◀ Retour