

Séances II à IV

Théorie des jeux

Décisions stratégiques et équilibre de Nash

Anderson VIL

vladerinson@gmail.com

THEMA

CY Cergy Paris Université

Année universitaire 2026–2027

Où en sommes-nous ?

Le critère organisateur posé en séance 1

Acquis de la séance I

La théorie des jeux devient **nécessaire** lorsque la meilleure décision d'un agent dépend des décisions qu'il **anticipe** chez d'autres agents, lesquels anticipent eux-mêmes son comportement.

Pas besoin de théorie des jeux

- Concurrence parfaite
- Monopole / monopsonne statique
- Concurrence monopolistique de grand groupe

Théorie des jeux indispensable

- Duopole, oligopole, oligopsonne
- Cartel (partage *et* stabilité)
- Différenciation spatiale ou verticale
- Dissuasion à l'entrée

Ce que vous devez savoir faire à la fin de la séance IV

1. Écrire la **forme normale** d'un jeu à deux joueurs et lire une matrice de gains.
2. Identifier une **stratégie dominante** et une **stratégie dominée**.
3. Trouver **tous** les équilibres de Nash en stratégies pures par la méthode des meilleures réponses.
4. Calculer un **équilibre en stratégies mixtes** dans un jeu 2×2 .
5. Distinguer **Nash** et **maximin**, et dire quand chacun est pertinent.
6. Expliquer pourquoi la **répétition** peut soutenir la coopération, et pourquoi l'horizon fini la détruit.
7. Construire un **arbre de jeu** et le résoudre par **induction à rebours**.

Introduction générale : qu'est-ce qu'un jeu ?

Moment interactif n°0 : laquelle n'est pas un jeu ?

Vote à main levée

1. Deux compagnies aériennes fixent chaque semaine le tarif Paris–Nice.
2. Un agriculteur décide s'il sème du blé ou du colza en fonction de la météo attendue.
3. Deux États négocient un accord de désarmement.
4. Deux colocataires décident chacun de leur côté s'ils font la vaisselle.

Laquelle de ces quatre situations n'est pas un jeu ?

Réponse : un jeu suppose une interdépendance stratégique

Définition — un jeu

Un **jeu** est le formalisme qui décrit les interactions stratégiques possibles entre des agents. Chaque agent choisit parmi un ensemble d'actions, et le résultat qu'il obtient dépend **aussi** des choix des autres.

Ce sont des jeux : 1, 3, 4

Dans chacune, le gain de l'un dépend de la décision de l'autre, et chacun le sait avant de décider.

Ce n'est pas un jeu : 2

La météo n'a pas d'intention et ne réagit pas à ce que sème l'agriculteur. C'est une **décision en incertitude**, pas une interaction. ➡ **Chapitre 2.**

Le critère n'est pas la difficulté du choix, c'est la présence d'un autre décideur qui réagit.

De quoi un jeu est-il caractérisé ?

Un jeu doit spécifier cinq choses

1. **Les joueurs** — qui décide ? Combien sont-ils ?
2. **Les actions et les stratégies** — que peut faire chacun ? Une *stratégie* est un plan complet, une *action* un coup isolé.
3. **Les gains** (*payoffs*) — quelle valeur chaque joueur attache-t-il à chaque issue ?
4. **Les ensembles d'information** — que sait chacun au moment de jouer ?
5. **La nature** — éventuellement, quels événements exogènes aléatoires peuvent se produire, et avec quelles probabilités ?

Tant que ces cinq éléments ne sont pas fixés, **le jeu n'est pas défini** et aucune solution n'a de sens.

Le gabarit appliqué : la guerre des prix en oligopole

L'exemple

Deux compagnies aériennes se partagent une ligne. Chacune annonce son tarif le lundi matin, sans connaître celui de l'autre.

Pourquoi c'est bien un jeu

- **Joueurs** : les deux compagnies.
- **Stratégies** : le tarif annoncé.
- **Gains** : le profit, qui dépend des *deux* tarifs.
- **Information** : chacune ignore le tarif de l'autre au moment de décider.

Le point décisif

Baisser son prix n'est rentable que *si l'autre ne le fait pas*. Le profit n'est donc pas une fonction de ma seule décision, **je ne peux pas optimiser sans anticiper**.

Exemples de jeu

Terrain	Situation type
Oligopole	Guerre des prix, prédation, barrières à l'entrée.
Géopolitique	Sanctions économiques, escalade et désescalade, négociation d'un traité.
Relation d'emploi	Effort de l'employé et réponse de l'employeur : promotion, contrôle, licenciement.
Décisions de couple	Choix du lieu de vie, partage des tâches, engagement et rupture.
Jeux de société	Échecs, go, poker : les cas les plus purs, aux règles entièrement explicites.

La théorie des jeux n'est pas une théorie des marchés : c'est une théorie de la décision en interaction.

Pourquoi ces situations relèvent bien de la même catégorie

Le test en trois questions

1. Y a-t-il **au moins deux décideurs** dont les choix comptent ?
2. Le résultat de l'un dépend-il **des choix des autres** ?
3. Chacun **le sait-il** au moment de décider ?

Trois « oui » $\Rightarrow$ c'est un jeu.

Cas franc : les échecs

Deux joueurs, gains strictement opposés, règles connues de tous. Trois « oui ».

Définition de la théorie des jeux

Objet

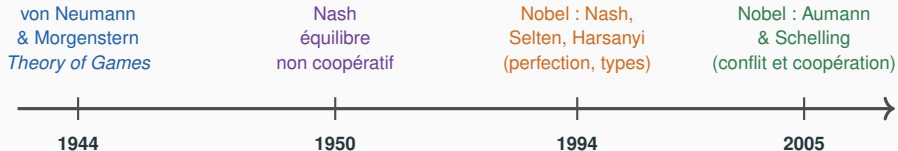
La **théorie des jeux** est l'étude formelle de la décision rationnelle en situation d'**interdépendance stratégique**. Elle cherche à déterminer quelles configurations de comportements sont **stables**, c'est-à-dire telles qu'aucun joueur ne veuille en dévier.

Ce qu'elle suppose

- Les agents sont **rationnels** : préférences cohérentes, choix optimisant.
- Ils **anticipent** : ils tirent les conséquences des actions passées et prévues.
- La structure du jeu est **connaissance commune** (Aumann) : tous la connaissent, tous savent que tous la connaissent, et ainsi de suite.

La rationalité limitée (Simon, 1982) relâche la première hypothèse.

Brève histoire de la discipline



Deux prix Nobel en onze ans : la théorie des jeux est passée du statut de curiosité mathématique à celui de langage commun des sciences sociales.

Branches de la théorie des jeux : ce que ce cours couvre

Branche	Objet	Dans ce cours
Jeux stratégiques	Coups simultanés, forme normale	Oui ➡ §1.2, 1.3
Jeux dynamiques	Coups séquentiels, forme extensive	Oui ➡ §1.5
Jeux répétés	Le même jeu, encore et encore	Oui ➡ §1.4
Jeux coopératifs	Engagements exécutoires, partage de la valeur	Notion seulement
Jeux à information incomplète	Types, croyances, signaux	➡ Chapitre 3
Jeux différentiels	Décisions en temps continu	Non ➡ niveau master

Les jeux coopératifs (valeur de Shapley, noyau) forment une théorie distincte, avec ses propres concepts de solution, nous n'en retenons que la définition.

Typologie des jeux : trois critères croisés

1. La relation

coopératif
vs non coopératif

2. Le temps

simultané
vs séquentiel

3. L'information

complète vs incomplète
parfaite vs imparfaite

Ces trois critères sont indépendants

Un jeu peut être non coopératif *et* séquentiel *et* à information complète mais imparfaite.

Critère 1 — Selon le type de relation entre les agents

Jeu non coopératif

Les joueurs **ne peuvent pas** prendre d'engagement **contraignant** les uns envers les autres. Chaque décision est unilatérale et influence les gains des autres.

Jeu coopératif

Les joueurs **peuvent** prendre des engagements contraignants, exécutable par un tiers. L'analyse porte alors sur le **partage de la valeur créée**.

Le critère, et lui seul

Un engagement pris est-il exécutoire ? Ni la possibilité de communiquer, ni la bonne volonté des joueurs n'entrent dans la définition.

Exemple non coopératif : le duopole de Cournot

L'exemple

Deux firmes servent le même marché. Chacune choisit sa **quantité** q_1 et q_2 , **séparément** et sans concertation. Le prix $P = 30 - (q_1 + q_2)$ résulte de la somme des deux.

Pourquoi ce n'est pas coopératif

- Aucun accord n'est signé, **aucun tribunal** ne pourrait en imposer un.
- Chaque firme peut à tout instant modifier sa quantité sans rien devoir à l'autre.
- Chacune prend la quantité de l'autre **comme donnée** et optimise seule.

Ce que cela produit

Le résultat, $q_1 = q_2 = 10$, est **inférieur au profit joint maximal**. L'absence d'engagement exécutoire a un coût, et il est mesurable.

Exemple coopératif : le cartel

Les mêmes firmes signent un accord fixant la production totale au niveau qui **maximise le profit joint**, puis se partagent ce profit selon une clé convenue.

Pourquoi c'est coopératif

- L'analyse porte sur la **maximisation jointe**, puis le **partage**.
- L'accord est supposé **tenu**, il est traité comme exécutoire.
- Concepts pertinents : le noyau, la valeur de Shapley — pas l'équilibre de Nash.

Avertissement — « coopératif » ne veut pas dire « gentil »

Un cartel est nuisible et souvent illégal, il est pourtant **coopératif** au sens technique. Inversement, deux firmes qui maintiennent tacitement des prix élevés coopèrent *de fait* dans un jeu **non coopératif**. **Aucun tribunal n'oblige un membre de l'OPEP à respecter son quota. En pratique, le cartel se rejoue en jeu non coopératif.**

Critère 2 — Selon le déroulement dans le temps

Jeu simultané (statique)

Chacun décide **sans avoir observé** la décision de l'autre.

Exemple : les deux tarifs aériens annoncés le même lundi.

Représentation : forme normale, matrice de gains.

Jeu séquentiel (dynamique)

Les joueurs jouent **à tour de rôle**, en observant ce qui précède.

Exemple : Stackelberg — une firme fixe sa quantité, l'autre répond.

Représentation : forme extensive, arbre de décision.

Pourquoi les tarifs aériens forment un jeu simultané

Les deux annonces peuvent être séparées de plusieurs jours. Ce qui compte n'est pas l'horloge mais l'information. **Tant que je n'ai pas observé le tarif de l'autre, je joue simultanément.**

Dans un jeu **simultané** à un coup, stratégie = action.

Critère 3a — Information complète ou incomplète

Définition

Un jeu est à **information complète** lorsque chaque joueur connaît la **structure du jeu** : l'identité des joueurs, l'espace des stratégies de chacun, et **les gains de tous** associés à chaque issue.

Exemple : complète

Deux supermarchés voisins, aux coûts publics et comparables, fixant leurs prix.

Pourquoi ? Chacun sait ce que l'autre gagne dans chaque configuration.

Exemple : incomplète

Une enchère où chacun ignore la valeur que les autres attribuent au bien.

Pourquoi ? La matrice des gains elle-même est inconnue. ➡ **Chapitre 3.**

L'information complète porte sur la *matrice*.

Critère 3b — Information parfaite ou imparfaite

Définition

Un jeu est à **information parfaite** lorsque chaque joueur, au moment de jouer, **observe l'intégralité des coups déjà joués**. Chaque ensemble d'information est alors réduit à un seul nœud.

Exemple : parfaite

Les échecs.

Pourquoi ? À chaque coup, l'échiquier affiche tout l'historique de la partie. Rien n'est caché.

Exemple : imparfaite

Le poker, ou tout jeu simultané.

Pourquoi ? Je décide sans savoir ce que l'autre a fait, ou détient.

L'information parfaite porte sur l'historique.

Ne pas confondre : « complète » et « parfaite » sont indépendantes

	Information parfaite	Information imparfaite
Information complète	Échecs : je connais les règles, les gains, et tout l'historique.	Dilemme du prisonnier : je connais la matrice, mais pas le coup de l'autre.
Information incomplète	Enchère séquentielle à valeurs privées : je vois les enchères, j'ignore les valuations.	Enchère sous pli scellé : je ne vois ni les offres, ni les valuations.

À noter

Complète $\neq$ parfaite. Les joueurs connaissent-ils les caractéristiques stratégiques pertinentes du jeu, notamment les gains/types ? Lorsqu'un joueur agit, connaît-il exactement l'histoire du jeu qui a conduit au nœud où il se trouve ? La première porte sur *ce qu'est le jeu* ; la seconde sur *ce qui s'est passé*.

Tableau récapitulatif : les trois critères croisés

Jeu	Relation	Temps	Information
Duopole de Cournot	non coopératif	simultané	complète, imparfaite
Cartel (l'accord)	coopératif	—	complète
Cartel (sa stabilité)	non coopératif	répété	complète, imparfaite
Stackelberg	non coopératif	séquentiel	complète, parfaite
Dilemme du prisonnier	non coopératif	simultané	complète, imparfaite
Échecs	non coopératif	séquentiel	complète, parfaite
Poker	non coopératif	séquentiel	incomplète, imparfaite
Enchère sous pli scellé	non coopératif	simultané	incomplète, imparfaite

Le cartel apparaît deux fois. C'est un jeu coopératif au moment de l'accord, et peut-être non coopératif au moment de le respecter.

Vote à main levée

Dans un jeu **simultané**, l'information est-elle
parfaite ou **imparfaite** ?

Imparfaite — toujours

Dans un jeu simultané, chaque joueur choisit **sans observer** le coup de l'autre. Il ne sait donc pas où il se situe dans l'arbre. Les deux nœuds appartiennent au **même ensemble d'information**. L'information est nécessairement **imparfaite**.

Mais elle peut être parfaitement complète

Si chacun connaît la matrice des gains, l'information est **complète** et imparfaite.

Le dilemme du prisonnier en est l'illustration exacte. Les deux complices connaissent parfaitement le barème des peines, et ignorent seulement ce que l'autre est en train de dire.

Un jeu simultané est donc toujours imparfait, et *presque toujours* complet dans ce cours.

13.1 — Décisions stratégiques et nature du jeu

Une enchère

Je mets aux enchères un **billet de 20 €**.

Règles :

- enchères orales, ascendantes, par paliers de 1 € ;
- le **plus offrant** remporte le billet et paie son enchère ;
- **le deuxième plus offrant paie aussi son enchère — et ne reçoit rien.**

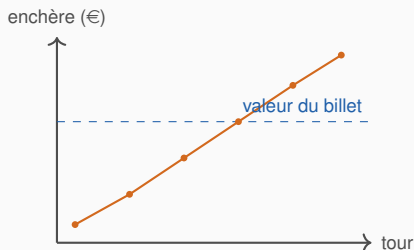
Qui ouvre à 1 € ?

Débrief : pourquoi l'enchère dérape

- À 19 € contre 18 €, le second doit choisir entre **perdre 18 €** et **enchérir 20 €** (perte nulle s'il gagne).
- Enchérir reste individuellement rationnel à **chaque étape**.
- L'escalade se poursuit *au-delà* de 20 €.

Le diagnostic

L'erreur n'est pas un défaut de calcul, c'est de n'avoir pas **anticipé la réaction de l'autre** et la **séquence** qu'elle enclenche.



La forme normale : la matrice de gains

Convention de lecture

Dans chaque case,

gain du joueur ligne ; gain du
joueur colonne

Cette convention (*le premier nombre est celui du joueur en ligne*) sera respectée sans exception toute l'année.

Forme normale = joueurs + ensembles de stratégies + fonctions de gain. Rien d'autre : ni ordre des coups, ni information.

		Joueur 2	
		Gauche	Droite
Joueur 1	Haut	$a ; b$	$c ; d$
	Bas	$e ; f$	$g ; h$

Moment interactif n°2 : classez ces quatre situations

Vote à main levée — coopératif (C) ou non coopératif (NC) ?

1. Deux supermarchés voisins fixent leurs prix chaque lundi matin, chacun de son côté.
2. Un syndicat et une direction signent une convention collective devant un médiateur.
3. Les membres de l'OPEP annoncent des quotas de production.
4. Deux entreprises fusionnent après signature d'un protocole d'accord.

Levez la main pour **C**, puis pour **NC**.

Situation		Pourquoi
1. Prix des deux supermarchés	NC	Aucun engagement exécutoire.
2. Convention collective	C	Contrat opposable.
3. Quotas de l'OPEP	NC	Aucun tribunal international n'oblige à respecter un quota.
4. Fusion	C	Protocole exécutoire.

Conséquence directe

Un cartel est un **jeu non coopératif** déguisé en accord. C'est précisément pour cela qu'il pose un **problème de stabilité** — et que nous aurons besoin des **jeux répétés** (👉 §1.4).

Hypothèse implicite : la rationalité

Hypothèses de travail de tout le chapitre

1. Chaque joueur est **rationnel** : il maximise son gain.
2. Chaque joueur **sait** que les autres sont rationnels.
3. Chaque joueur sait que les autres savent qu'il est rationnel. . . *et ainsi de suite*.

On parle de **connaissance commune** de la rationalité et de la structure du jeu.

Hypothèse forte et coûteuse

L'enchère de tout à l'heure a montré que l'hypothèse 2 est empiriquement fragile. Nous verrons en 🖱️ §1.3 (**maximin**) ce qu'il advient quand on doute de la rationalité de l'adversaire.

Complément : symétrique ou asymétrique ?

L'introduction a distingué **complète** et **parfaite**. Une troisième coupure organise la suite du cours.

Situation	Ce qui est ignoré	Où dans le cours
Incertitude stratégique	Le coup que l'autre va jouer	Toute la séance 2
Information incomplète symétrique	Un état du monde, ignoré également de tous	Chapitre 2 : risque
Information asymétrique	Une caractéristique d'un joueur, connue de lui seul	Chapitre 3 : information

Résumé

- « J'ignore ce que mon rival va *jouer* » : incertitude stratégique.
- « J'ignore les *coûts* de mon rival » : information incomplète.

13.2 — Stratégies dominantes

Moment interactif n°3 : remplissez la matrice

À vous — 4 minutes

Deux enseignes concurrentes, **Aubert** et **Belmont**, décident chacune de lancer ou non une campagne publicitaire. Profits en millions d'euros :

- les deux font de la publicité : Aubert 10, Belmont 5 ;
- Aubert seul fait de la publicité : Aubert 15, Belmont 0 ;
- Belmont seul fait de la publicité : Aubert 6, Belmont 8 ;
- aucun ne fait de publicité : Aubert 10, Belmont 2.

Écrivez la matrice. Que doit faire Aubert ?

La matrice du jeu publicitaire

		Belmont	
		Publicité	Pas de publicité
Aubert	Publicité	10 ; 5	15 ; 0
	Pas de publicité	6 ; 8	10 ; 2

Raisonnement d'Aubert

- Si Belmont fait de la pub : $10 > 6$
- Si Belmont n'en fait pas : $15 > 10$

Raisonnement de Belmont

- Si Aubert fait de la pub : $5 > 0$
- Si Aubert n'en fait pas : $8 > 2$

Chacun fait de la publicité, quoi que fasse l'autre.

Définition — Stratégie dominante (*Dominant strategy*)

Une stratégie s_i est dite **dominante** pour le joueur i si elle lui procure un gain strictement supérieur à toute autre stratégie, **quelles que soient** les stratégies des autres joueurs :

$$\pi_i(s_i, s_{-i}) > \pi_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall s'_i \neq s_i, \forall s_{-i}.$$

Une stratégie **faiblement dominante** est au moins aussi bonne partout et strictement meilleure dans au moins un cas.

$$\pi_i(s_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall s'_i \neq s_i, \forall s_{-i}.$$

Équilibre en stratégies dominantes

Si **chaque** joueur dispose d'une stratégie dominante, le profil correspondant est un **équilibre en stratégies dominantes**.

Dominante stricte, dominante faible, dominée

Notion	Condition	Usage
Dominante stricte	Strictement meilleure dans tous les cas	Prédiction très robuste
Dominante faible	Au moins aussi bonne partout, strictement meilleure quelque part	Prédiction plus fragile
Stratégie dominée	Il existe une autre stratégie toujours meilleure	Peut être éliminée

Élimination itérée des stratégies strictement dominées

Un joueur rationnel ne joue jamais une stratégie strictement dominée. Si tous le savent, on peut retirer ces stratégies de la matrice, puis recommencer sur la matrice réduite.

Cette procédure ne fonctionne que grâce à la connaissance commune de la rationalité posée en §1.1.

Exemple de dominance stricte et de dominance faible

		Joueur 2	
		Gauche	Droite
Joueur 1	Haut	2 ; 1	1 ; 0
	Bas	2 ; 0	0 ; 1

Comparons *Haut* et *Bas* pour le joueur 1 :

- Si le joueur 2 joue *Gauche* : $2 = 2$ — **égalité**.
- Si le joueur 2 joue *Droite* : $1 > 0$ — **avantage strict**.

Haut domine faiblement Bas, mais ne le domine pas strictement.

Définitions

- s_i domine **strictement** s'_i si $\pi_i(s_i, s_{-i}) > \pi_i(s'_i, s_{-i})$ pour tout s_{-i} .
- s_i domine **faiblement** s'_i si $\pi_i(s_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, s_{-i})$ pour tout s_{-i} , avec **au moins une** inégalité stricte.

L'élimination itérée des dominées *strictes* donne toujours le même résultat ; celle des dominées *faibles* dépend de l'ordre.

Quand la dominance disparaît

		Belmont	
		Publicité	Pas de pub.
Aubert	Publicité	10 ; 5	15 ; 0
	Pas de pub.	6 ; 8	20 ; 2

Un seul chiffre change : si personne ne fait de publicité, Aubert gagne **20** au lieu de 10.

Belmont conserve une stratégie strictement dominante : faire de la publicité ($5 > 0$ et $8 > 2$).

Aubert n'a plus aucune stratégie dominante — ni stricte, ni faible

- Si Belmont fait de la publicité : Aubert préfère en faire ($10 > 6$).
- Si Belmont n'en fait pas : Aubert préfère *ne pas* en faire ($20 > 15$).

Les deux comparaisons vont en **sens opposés**. Aucune stratégie d'Aubert n'est au moins aussi bonne partout, donc la dominance *faible* n'est pas remplie non plus.

Se mettre à la place de l'autre

Étape 1 — Belmont a-t-il une dominante ?

- Si Aubert fait de la pub : $5 > 0$
- Si Aubert n'en fait pas : $8 > 2$

Oui : Belmont fait de la publicité. Étape 2 —

Aubert le sait.

- Colonne « Publicité » : $10 > 6$

Aubert fait de la publicité.

		Belmont	
		Publicité	Pas de publicité
Aubert	Publicité	10 ; 5	15 ; 0
	Pas de publicité	6 ; 8	20 ; 2

Ce que l'on vient de faire

Le résultat (*Publicité, Publicité*) est stable sans être un équilibre en stratégies dominantes. Il nous faut donc un concept **plus général**.

13.3 — L'équilibre de Nash

Moment interactif n°4 : le choix de produit

Vote à main levée

Deux céréaliers, **Chabrier** et **Duval**, peuvent lancer une céréale *croustillante* ou une céréale *sucrée*. Le marché n'absorbe qu'**une seule** nouveauté de chaque type. Si les deux lancent la même, elles échouent toutes les deux.

		Duval	
		Croustillante	Sucrée
Chabrier	Croustillante	-5 ; -5	10 ; 10
	Sucrée	10 ; 10	-5 ; -5

Vous êtes Chabrier. Croustillante ou sucrée ? Levez la main.

L'équilibre de Nash

Définition — *Nash equilibrium*

Un profil de stratégies $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ est un **équilibre de Nash** si *chaque joueur fait le mieux qu'il puisse, compte tenu de ce que font les autres* :

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i, \forall i.$$

Aucun joueur n'a intérêt à **dévier unilatéralement**.

Stratégies dominantes

Je fais le mieux possible **quoi que** tu fasses.

Tu fais le mieux possible **quoi que** je fasse.

Équilibre de Nash

Je fais le mieux possible **étant donné** ce que tu fais.

Tu fais le mieux possible **étant donné** ce que je fais.

Méthode : la méthode des meilleures réponses

Algorithme

1. Pour **chaque colonne**, souligner le meilleur gain du **joueur ligne**.
2. Pour **chaque ligne**, souligner le meilleur gain du **joueur colonne**.
3. Toute case où **les deux** nombres sont soulignés est un équilibre de Nash.

		Duval	
		Croustillante	Sucrée
Chabrier	Croustillante	-5 ; -5	<u>10</u> ; <u>10</u>
	Sucrée	<u>10</u> ; <u>10</u>	-5 ; -5

Deux équilibres de Nash en stratégies pures.

Deux équilibres : le problème de la coordination

- Les deux équilibres sont **également plausibles** et donnent le même gain.
- Rien dans la théorie ne dit **lequel** sera atteint.
- Le pire résultat — lancer la même céréale — n'est *pas* un équilibre, mais reste parfaitement possible en pratique.

Ce que la théorie ne fait pas

L'équilibre de Nash est un critère de **stabilité**, pas une **prédiction unique**.

Comment les firmes peuvent s'en sortir

- Annonces publiques, communiqués de presse
- Signaux de prix, leadership
- Habitudes de branche, « points focaux »

L'accord n'a pas besoin d'être contraignant, il suffit qu'il soit *cru*.

Dominance et Équilibre de Nash

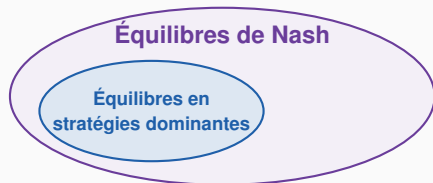
Proposition

Tout équilibre en stratégies dominantes est un équilibre de Nash.

En effet, si ma stratégie est la meilleure *quoi que* fasse l'autre, elle est en particulier la meilleure *étant donné* ce que l'autre fait.

La réciproque est fausse

Il existe des équilibres de Nash dans des jeux où **aucun joueur** n'a de stratégie dominante — ni stricte, ni faible. **La diapositive suivante en donne un contre-exemple.**



La bataille des sexes

Andy et Thara veulent passer la soirée **ensemble** mais préfèrent des sorties différentes. Thara préfère l'opéra, Andy le match. Sortir chacun de son côté ne satisfait personne.

		Thara	
		Opéra	Match
Andy	Opéra	2 ; 1	0 ; 0
	Match	0 ; 0	1 ; 2

Aucune stratégie dominante, pour personne

- Andy : si Thara va à l'opéra, il préfère l'opéra ($2 > 0$) ; si Thara va au match, il préfère le match ($1 > 0$).
- Thara : le raisonnement est symétrique.

La meilleure réponse de chacun **dépend** de l'autre. Aucun joueur n'a de stratégie dominante ici.

La bataille des sexes : deux équilibres de Nash en stratégies pures

		Thara	
		Opéra	Match
Andy	Opéra	<u>2</u> ; <u>1</u>	0 ; 0
	Match	0 ; 0	<u>1</u> ; <u>2</u>

Ce que cela établit

Deux équilibres de Nash existent alors qu'**aucun joueur** n'a de stratégie dominante.

L'ensemble des équilibres de Nash est strictement plus grand.

Un conflit distributif

Contrairement au choix de produit, les deux équilibres ne sont pas équivalents. Chacun *préfère* celui qui lui donne 2. La sélection d'équilibre devient un enjeu.

Moment interactif n°5 : le jeu de la plage

Question ouverte — 3 minutes

Vous et un concurrent vendez des boissons sur une plage de **200 mètres**. Les baigneurs sont **uniformément répartis** et vont toujours **au vendeur le plus proche**. Mêmes produits, mêmes prix.

Où vous placez-vous ?

?

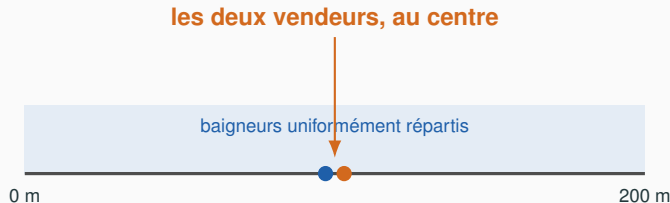
baigneurs uniformément répartis

0 m

200 m

Écrivez votre position sur une feuille avant qu'on en discute.

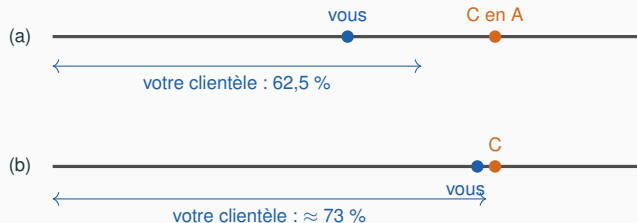
La réponse au jeu de la plage



Contre-intuitif

La plupart des réponses placent le vendeur *au milieu de sa moitié*, à 50 m. C'est la solution qui minimiserait la distance parcourue par les baigneurs — **ce n'est pas un équilibre**.

La réponse au jeu de la plage: suite



Le seul équilibre de Nash

Les **deux** vendeurs se placent **au centre**. Partout ailleurs, l'un a intérêt à se rapprocher de l'autre *du côté du plus grand marché*.

Quelques enseignements du jeu de la plage

- Les concessionnaires automobiles alignés sur la même départementale
- Les stations-service en vis-à-vis
- Les enseignes de restauration groupées dans la même rue
- La convergence des candidats vers le centre en fin de campagne

Prolongement du cours

C'est le modèle de **Hotelling**. Nous y reviendrons  séance V avec :

- des **prix** endogènes (jeu à deux étapes),
- une **résolution à rebours**.

Avec des prix endogènes, le résultat s'inverse car la différenciation redevient rentable. C'est le principe de différenciation maximale.

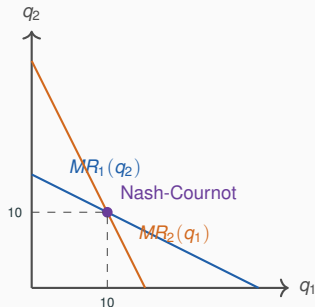
Nash en variables continues : rappel de Cournot

Acquis de Microéconomie II

Demande : $P = 30 - Q$, $Q = q_1 + q_2$,
coût marginal nul.

Meilleure réponse de la firme 1 : $q_1 = 15 - q_2/2$.

Équilibre : $q_1^* = q_2^* = 10$, $P = 10$, $\pi_i = 100$.



Relecture

L'équilibre de Cournot est l'**intersection des deux courbes de meilleure réponse** : un **équilibre de Nash** à stratégies continues.

Quand la rationalité du rival est douteuse : le maximin

		Apple	
		Ne pas investir	Investir
Microsoft	Ne pas investir	0 ; 0	-10 ; 10
	Investir	-100 ; 0	20 ; 10

Deux éditeurs de logiciels de chiffrement, respectivement Bitlocker et FileVault, envisagent d'adopter une nouvelle norme. La Microsoft a une part de marché beaucoup plus grande.

- **Investir** est une stratégie **dominante** pour la Apple ($10 > 0$ dans les deux cas).
- Donc Microsoft devrait investir et gagner 20. **C'est l'équilibre de Nash.**

Définition — stratégie de maximin

Stratégie qui **maximise le gain minimum** que l'on peut obtenir.

$$s_i^{\max \min} = \arg \max_{s_i} \min_{s_{-i}} \pi_i(s_i, s_{-i})$$

Pour Microsoft :

- Investir : pire cas = -100
- Ne pas investir : pire cas = -10

Le maximin est : ne pas investir.

Si Microsoft *savait* que Apple joue son maximin, elle préférerait investir. Le maximin n'est donc pas un équilibre.

Nash et maximin divergent

- **Nash** : Microsoft investit et gagne 20.
- **Maximin** : elle n'investit pas et perd 10.

Le maximin est **prudent**, pas maximisateur. Il assure contre l'erreur de l'autre.

Le maximin en situation

Domaine	Forme que prend le raisonnement
Incertitude radicale	Faute de probabilités crédibles, le critère de Wald (1945) classe les options par leur pire résultat.
Dissuasion nucléaire	La capacité de seconde frappe garantit un résultat minimal, plutôt qu'un gain espéré maximal.
Gestion prudentielle	Les tests de résistance bancaires dimensionnent les fonds propres sur le scénario le plus défavorable.
Stratégie défensive	Second fournisseur, capacités redondantes, stocks de sécurité : on paie pour relever le pire cas.

Une réserve de méthode

Hors du cas prudentiel, où la règle est *écrite* dans la norme, **presque aucune de ces décisions n'a été justifiée « en toutes lettres » comme un maximin**. C'est le plus souvent une **grille de lecture reconstruite après coup**.

Une position intermédiaire : maximiser le gain espéré

Microsoft n'est pas obligée de choisir entre le tout-Nash et le tout-prudence, elle peut affecter des **probabilités** aux actions de Apple.

Si $\Pr(\text{Apple n'investit pas}) = 0,1$

$$\mathbb{E}[\text{investir}] = 0,1(-100) + 0,9(20) = 8$$

$$\mathbb{E}[\text{ne pas}] = 0,1(0) + 0,9(-10) = -9$$

⇒ **investir.**

Si $\Pr(\text{Apple n'investit pas}) = 0,3$

$$\mathbb{E}[\text{investir}] = 0,3(-100) + 0,7(20) = -16$$

$$\mathbb{E}[\text{ne pas}] = 0,3(0) + 0,7(-10) = -7$$

⇒ **ne pas investir.**

Attention : ce n'est pas encore le chapitre 2

Les probabilités portent ici sur le **comportement** du rival, pas sur un **état de la nature**. L'incertitude reste **stratégique**.

Le dilemme du prisonnier

Rappel de la situation

Deux complices interrogés séparément. Chacun peut **avouer** ou **se taire**. Les gains sont des **années de prison** — donc à minimiser.

		Prisonnier B	
		Avouer	Se taire
Prisonnier A	Avouer	-5 ; -5	-1 ; -10
	Se taire	-10 ; -1	-2 ; -2

Les gains sont écrits en négatif (années de prison) pour rester dans la logique « plus c'est grand, mieux c'est ».

Résolution du dilemme

		Prisonnier B	
		Avouer	Se taire
Prisonnier A	Avouer	<u>-5</u> ; <u>-5</u>	<u>-1</u> ; -10
	Se taire	-10 ; <u>-1</u>	-2 ; -2

- **Avouer** est une stratégie **dominante** pour chacun.
- C'est donc aussi la stratégie **maximin**.
- L'issue (Avouer, Avouer) est un équilibre de Nash **unique**.

Le paradoxe

(Se taire, Se taire) donne -2 à chacun.
C'est **strictement mieux pour les deux**.

L'équilibre de Nash n'est pas Pareto-optimal.

Si les deux savent que se taire est mieux, pourquoi ne le font-ils pas ?

Si les deux savent que se taire est mieux, pourquoi ne le font-ils pas ?

Réponse

Parce que **savoir** ne suffit pas, il faudrait pouvoir **s'engager**. Dans un jeu non coopératif, la promesse de se taire n'est pas exécutoire, et chacun sait que l'autre gagnerait à la trahir.

L'obstacle n'est pas l'ignorance, c'est l'absence d'engagement.

C'est exactement ce que nous allons essayer de contourner ➡ §1.4, par la **répétition**.

Le dilemme du prisonnier en oligopole

		Firme 2	
		Prix bas	Prix élevé
Firme 1	Prix bas	<u>10</u> ; <u>10</u>	<u>100</u> ; -50
	Prix élevé	-50 ; <u>100</u>	50 ; 50

- Prix bas est **dominant** pour chacun.
- L'équilibre donne (10, 10).
- Le résultat coopératif donnerait (50, 50).

Ce que cela explique

La guerre des prix récurrente dans le transport aérien, la téléphonie mobile, la grande distribution — des secteurs pourtant très concentrés.

Cette matrice sera réutilisé ➡ §13.4.

Moment interactif n°6 : pile ou face

Par deux — 3 minutes

Chacun choisit **pile** ou **face** en secret, puis on révèle simultanément.

- Si les deux choix **coïncident**, le joueur A gagne 1 €.
- S'ils **diffèrent**, le joueur B gagne 1 €.

Jouez **dix manches** et notez vos gains.

Existe-t-il un « bon » choix ?

Aucun équilibre en stratégies pures

		Joueur B	
		Pile	Face
Joueur A	Pile	<u>1</u> ; -1	-1 ; <u>1</u>
	Face	-1 ; <u>1</u>	<u>1</u> ; -1

Vérification

Aucune case ne contient **deux** nombres soulignés. Quel que soit le profil, l'un des deux joueurs veut changer. **Il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.**

Faut-il conclure que la théorie échoue ? Non, il faut **élargir l'ensemble des stratégies.**

Définition — stratégie mixte

Une **stratégie mixte** est une **loi de probabilité** sur l'ensemble des stratégies pures. Le joueur **randomise** son choix.

Par opposition, une **stratégie pure** choisit une action avec certitude.

Théorème de Nash (1950)

Tout jeu fini (nombre fini de joueurs et de stratégies) possède **au moins un** équilibre de Nash, éventuellement en stratégies mixtes.

C'est ce théorème d'existence qui justifie l'élargissement. Il rétablit une garantie que les stratégies pures ne donnaient pas.

Calculer l'équilibre mixte : le principe d'indifférence

Soit $p = \Pr(\text{A joue Pile})$ et $q = \Pr(\text{B joue Pile})$.

Principe

À l'équilibre, chaque joueur doit être rendu **indifférent** entre ses stratégies pures par la randomisation de *l'autre*. Sinon il jouerait une pure.

Gains espérés de A :

$$\mathbb{E}_A[\text{Pile}] = q(1) + (1 - q)(-1) = 2q - 1, \quad \mathbb{E}_A[\text{Face}] = q(-1) + (1 - q)(1) = 1 - 2q.$$

Indifférence : $2q - 1 = 1 - 2q \Rightarrow \boxed{q = 1/2}$.

Par symétrie, $p = 1/2$.

Chacun joue pile ou face avec probabilité 1/2. Gain espéré = 0.

Un équilibre mixte moins symétrique

		Duval	
		Croustillante	Sucrée
Chabrier	Croustillante	-5 ; -5	10 ; 20
	Sucrée	20 ; 10	-5 ; -5

Soit $q = \Pr(\text{Duval joue Croustillante})$.

Indifférence de Chabrier :

$$-5q + 10(1 - q) = 20q - 5(1 - q)$$

$$10 - 15q = 25q - 5 \Rightarrow q = \frac{15}{40} = 0,375.$$

Par un calcul symétrique côté Duval : $p = 0,375$.

Ce jeu a trois équilibres de Nash

Deux en **stratégies pures** (croustillante/sucrée et sucrée/croustillante) et un en **stratégies mixtes**.

Le mixte est le moins bon des trois pour les deux joueurs car ils peuvent parfois lancer la même céréale.

La bataille des sexes : l'équilibre en stratégies mixtes

$p = \Pr(\text{ Andy : opéra}), q = \Pr(\text{ Thara : opéra}).$

Étape 1 — indifférence d'Andy

$$\mathbb{E}_1[\text{Opéra}] = 2q + 0(1 - q) = 2q$$

$$\mathbb{E}_1[\text{Match}] = 0q + 1(1 - q) = 1 - q$$

$$2q = 1 - q \Rightarrow \boxed{q = 1/3}$$

Étape 2 — indifférence de Thara

$$\mathbb{E}_2[\text{Opéra}] = 1p + 0(1 - p) = p$$

$$\mathbb{E}_2[\text{Match}] = 0p + 2(1 - p) = 2 - 2p$$

$$p = 2 - 2p \Rightarrow \boxed{p = 2/3}$$

Étape 3 — lecture du résultat

Chacun joue **sa** sortie préférée avec probabilité 2/3. Gain espéré est de 2/3 pour chacun — **moins que dans les deux équilibres purs**. Ils se retrouvent ensemble dans 4/9 des cas seulement.

Est-ce que ça a un sens pour une entreprise de randomiser ?

Est-ce que ça a un sens pour une entreprise de randomiser ?

Réponse courte, en trois temps

1. **Oui, littéralement**, quand être prévisible est coûteux – contrôles fiscaux, contrôles de billets, promotions surprises, audits.
2. **Oui, indirectement**, la mixité peut se lire comme la *proportion* d'agents d'une population qui jouent chaque pure.
3. **Mais** l'équilibre mixte est fragile, il suppose une indifférence exacte. Pindyck & Rubinfeld (2018) le jugent peu réaliste et se concentrent ensuite sur les stratégies pures.

Bilan de la première moitié

Concept	Critère	Portée
Stratégie dominante	Meilleure quoi que fasse l'autre	Rare, mais imparable
Équilibre de Nash	Meilleure <i>étant donné</i> l'autre	Général ; peut être multiple
Maximin	Maximise le pire cas	Doute sur la rationalité de l'autre
Stratégies mixtes	Randomisation	Garantit l'existence

Ce qui reste ouvert

Nous avons vu que l'issue non coopérative peut être **collectivement mauvaise** (dilemme du prisonnier). Deux voies pour en sortir : la **répétition** (👉 §1.4) et l'**ordre des coups** (👉 §1.5).

Pause — 5 minutes

13.4 — Jeux répétés

Moment interactif n°7 : on rejoue, mais cinq fois

Par deux — 5 minutes

Reprenez la matrice de tarification. Vous êtes deux firmes concurrentes.

- Vous annoncez vos prix **simultanément**, le 1^{er} de chaque mois.
- **Vous jouez cinq mois de suite**, en notant à chaque tour votre choix et vos gains.
- Interdiction de parler pendant la partie.

		Firme 2	
		Prix bas	Prix élevé
Firme 1	Prix bas	10 ; 10	100 ; -50
	Prix élevé	-50 ; 100	50 ; 50

Le jeu répété

Définition — jeu répété (*repeated game*)

Un **jeu répété** est un jeu dans lequel les mêmes actions sont prises et les mêmes gains perçus **encore et encore**. Le jeu élémentaire s'appelle le **jeu de base** (*stage game*).

Ce que la répétition change

- À chaque période, l'ensemble des **actions** du jeu de base peut rester exactement le même.
- En revanche, une **stratégie** doit préciser quoi jouer après chaque histoire possible.
- Le nombre de stratégies devient donc très grand, elles sont des règles conditionnelles à l'histoire.
- Les actions passées peuvent influencer les choix futurs : réputation, récompense et représailles deviennent possibles.

Stratégie $\neq$ **action** : dans un jeu répété, cette distinction devient essentielle. prend tout son sens.

Le donnant-donnant

Tit-for-tat — donnant-donnant

1. Je commence par **coopérer** (prix élevé).
2. Ensuite, je joue **exactement ce que l'autre a joué au tour précédent**.

Le tournoi d'Axelrod (1984)

Robert Axelrod fait s'affronter en simulation les stratégies proposées par des théoriciens des jeux. Le donnant-donnant obtient des performances remarquables face à l'ensemble des stratégies soumises.

Exemple du donnant-donnant

Firme 1 applique le donnant-donnant ; firme 2 casse les prix au mois 3, puis revient.

	Mois 1	Mois 2	Mois 3	Mois 4	Mois 5
Coup de la firme 1	Élevé	Élevé	Élevé	Bas	Élevé
Coup de la firme 2	Élevé	Élevé	Bas	Élevé	Élevé
Gain firme 1 / cumul	50 / 50	50 / 100	−50 / 50	100 / 150	50 / 200
Gain firme 2 / cumul	50 / 50	50 / 100	100 / 200	−50 / 150	50 / 200

Deux lectures

La rétorsion arrive au mois 4, le pardon au mois 5. **Le donnant-donnant ne bat jamais son adversaire direct** — 200 partout — mais il fait perdre 50 à chacun par rapport à la coopération continue (250). C'est ainsi qu'il gagne un tourno, en accumulant, pas en écrasant.

Les quatre qualités (propriétés) — et la faille du donnant-donnant

Pourquoi elle fonctionne

- **Non-provocateur** : il coopère au premier tour et ne dévie pas le première.
- **Réactive** : il punit dès la période suivante à une déviation.
- **Indulgente** : il revient à la coopération dès que l'autre y revient.
- **Lisible** : sa règle est simple et rapidement identifiable.

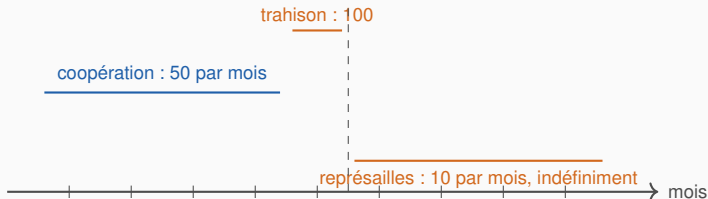
Limite : l'erreur de perception

Avec observation ou mise en œuvre imparfaite, une erreur peut déclencher une chaîne de représailles : chaque joueur interprète la réponse de l'autre comme une nouvelle déviation.

Des variantes plus tolérantes peuvent réduire cet effet d'écho.

Horizon infini : la coopération devient-elle automatiquement rationnelle ?

Non. Un horizon infini rend possibles des **sanctions futures**, mais il ne suffit pas à *lui seul* à soutenir la coopération.



La déviation procure

- un **gain immédiat** ;
- mais peut entraîner des **pertes futures**.

Le choix dépend donc du **poids accordé à l'avenir**, mesuré par le facteur d'actualisation δ .

Condition générale

$$\begin{array}{c} \text{valeur de la coopération} \\ \geq \\ \text{valeur d'une déviation.} \end{array}$$

Nous allons maintenant calculer cette condition pour une stratégie de **déclenchement permanent** (*grim trigger*).

Grim trigger — calcul du seuil de coopération

Les deux firmes coopèrent tant qu'aucune déviation n'a eu lieu. Après la première déviation, elles jouent **prix bas pour toujours**. $\delta \in [0, 1)$ est le facteur d'actualisation d'une période à la suivante.

V_C : coopérer aujourd'hui et à l'avenir

Valeur pour une firme, **au début d'une période sur le chemin coopératif** :

$$V_C = 50 + 50\delta + 50\delta^2 + \dots = \frac{50}{1-\delta}.$$

La coopération est soutenable si $V_C \geq V_T$, donc si

$$\frac{50}{1-\delta} \geq 100 + \frac{10\delta}{1-\delta}$$

$$50 \geq 100 - 90\delta \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \geq \frac{5}{9} \simeq 0,556$$

Interprétation : l'horizon infini permet la coopération seulement si l'avenir compte suffisamment.

V_T : trahir aujourd'hui

Elle obtient 100 aujourd'hui ; la punition commence à la période suivante ; elle reçoit ensuite 10 par période :

$$V_T = 100 + 10\delta + 10\delta^2 + \dots = 100 + \frac{10\delta}{1-\delta}.$$

Pourquoi la punition est-elle crédible ici ?

Ici, la punition « prix bas pour toujours » est crédible parce que (bas, bas) est l'**équilibre du jeu de base**. Après une déviation, aucune firme n'a intérêt à relever seule son prix.

Tit-for-tat vs Grim trigger

Deux stratégies différentes

- **Donnant-donnant** (*tit-for-tat*) : Je commence par coopérer puis je reproduis l'action de l'autre à la période précédente. Une reprise de coopération peut donc être **immédiatement pardonnée**.
- **Déclenchement** (*grim trigger*) : Je coopère tant qu'aucune déviation n'a eu lieu. Après la première, je **punis pour toujours**.

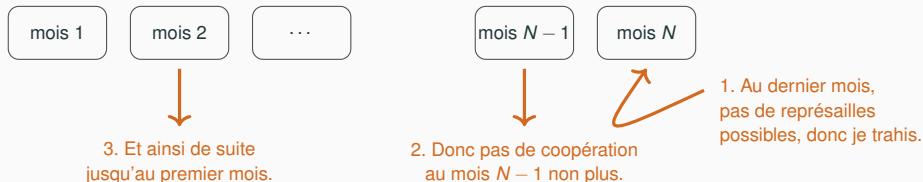
Le calcul du slide précédent utilise **grim trigger**. Dans cet exemple, une punition permanente accroît le coût futur d'une déviation et facilite le soutien de la coopération.

Ce qu'il faut retenir

Une punition n'est utile que si elle est à la fois **suffisante** et **crédible**. La crédibilité sera au cœur de la  §1.5.

Horizon fini connu : détricotage dans ce jeu

Supposons N périodes, avec N **connu de tous**. Dans notre jeu de base, **prix bas est dominant pour chaque firme**.



- À la période N , aucune punition future n'est possible. Chacun joue bas.
- Sachant cela, la période $N - 1$ devient à son tour une dernière période pertinente.
- Le raisonnement se répète jusqu'à la période 1.

prix bas à chaque période

Conditions importantes

Horizon fini **connu**, **rationalité commune** et **structure particulière** de notre jeu de base.
Ce résultat ne vaut pas pour tout jeu répété fini.

Premier argument : un cas numérique

Chaque mois, la relation a **une chance sur dix de s'arrêter**. Notons $\rho = 0,9$ la probabilité qu'elle se poursuive, et supposons le taux d'intérêt nul.

Étape 1 — combien de mois ?

Durée espérée : $\frac{1}{1-\rho} = 10$ mois.

Mais **aucun n'est identifiable à l'avance comme le dernier**.

Étape 2 — quel poids pour le mois suivant ?

Un euro du mois prochain n'a que 9 chances sur 10 d'exister : $\delta = \rho = 0,9$.

Étape 3 — conclusion

La coopération tient si $\delta \geq 5/9 \approx 0,56$. Ici $0,9 \geq 0,56$: **les prix élevés sont soutenables**, alors que la relation ne durera que dix mois en moyenne.

Un horizon aléatoire se traite comme un horizon infini actualisé

Supposons qu'après chaque période la relation continue avec une probabilité constante ρ , connue de tous, et que le taux d'actualisation soit r . Le poids effectif de la période suivante est

$$\delta = \frac{\rho}{1+r}.$$

Pourquoi le détricotage ne démarre pas ?

Il n'existe plus de période connue de tous comme étant la dernière, le détricotage précédent ne peut donc pas démarrer. Dans notre exemple, la coopération est soutenable si $\delta \geq 5/9$.

Attention

Toute date de fin aléatoire n'est pas automatiquement équivalente à ce modèle ; le résultat repose ici sur une probabilité de continuation stationnaire.

Second argument : le doute sur le type de l'adversaire

Supposons maintenant un horizon *connu*, et plaçons-nous aux **deux derniers mois**. La firme 2 hésite entre deux hypothèses sur la firme 1, et accorde la probabilité μ à la première.

Gains cumulés de la firme 2 sur deux mois	F1 « donnant-donnant »	F1 pleinement rationnelle
Coopérer au mois 1, casser les prix au mois 2	$50 + 100 = 150$	$-50 + 10 = -40$
Casser les prix les deux mois	$100 + 10 = 110$	$10 + 10 = 20$

Espérances : $190\mu - 40$ contre $90\mu + 20$.

La première l'emporte si

$$190\mu - 40 > 90\mu + 20 \iff 100\mu > 60 \iff \boxed{\mu > 0,6}.$$

Un doute de 60 % suffit à rendre la coopération rationnelle jusqu'à l'avant-dernier mois.

Ce que ce second argument coûte en hypothèses

👉 Chapitre 3 : un joueur en sait plus que l'autre

Le raisonnement précédent suppose que la firme 2 entretient une **croyance probabilisée sur le type** de la firme 1, et que la firme 1 **connaît son propre type** sans que la firme 2 le connaisse. C'est un jeu à **information incomplète**, et l'ignorance y est **asymétrique**.

L'argument de l'horizon incertain

L'ignorance porte sur un **événement**, et elle est **partagée** par les deux firmes.

L'argument du doute sur le type

L'ignorance porte sur une **caractéristique d'un joueur**, connue de lui seul. Outils : Harsanyi, équilibre bayésien. 👉 **Chapitre 3.**

Date de fin inconnue : risque commun ou information privée ?

1. Date de fin aléatoire, loi connue de tous

Aucun joueur ne sait quand la relation prendra fin, mais tous connaissent la **même probabilité de continuation** $\Rightarrow$ incertitude **commune** / **symétrique**.

Elle intervient ici parce qu'elle modifie directement les incitations dans le **jeu répété** via δ .

2. Date de sortie connue seulement par un joueur

Un joueur sait qu'il quittera le marché à une date que l'autre ignore $\Rightarrow$ **information privée**, donc jeu à **information incomplète**.

Cette date privée peut être traitée comme une caractéristique — un **type** — du joueur.

3. Type privé plus généralement

Coût, productivité, rationalité, valuation ou horizon **connus d'un seul joueur** relèvent de l'**information incomplète**.

Pourquoi le cas 1 est-il ici ?

Parce que la question étudiée est : *comment l'incertitude sur la poursuite de la relation modifie-t-elle un jeu répété ?* Le chapitre sur le risque fournira ensuite les outils plus généraux de décision sous incertitude.

Applications historiques : pourquoi la coopération tacite est-elle plus facile dans certains marchés ?

Compteurs d'eau — cas historique présenté par Pindyck & Rubinfeld (2018)

- Quatre grands producteurs pendant une longue période.
- Demande décrite comme stable et peu élastique.
- Relations durables avec les acheteurs.
- Barrières à l'entrée importantes.
- Peu de sous-cotation observée et rentabilité élevée.

Interprétation du manuel : ces conditions sont compatibles avec une coopération tacite durable dans un jeu répété. **Ce n'est pas une preuve causale de collusion.**

Transport aérien — cas historique

- Forte tentation de réduire les prix : le coût marginal d'un passager supplémentaire est faible à court terme.
- Demande fluctuante et parfois difficile à prévoir.
- Tentatives historiques de simplification/coordination tarifaire rapidement déstabilisées par des réductions de prix.
- Développement de compagnies à bas coûts et d'outils de comparaison des tarifs.

Grille de lecture

La coopération est plus facile lorsque :

1. l'avenir a suffisamment de poids (δ élevé) ;
2. une déviation peut être **détectée** et **sanctionnée** ;
3. le **gain immédiat** d'une déviation est limité ;
4. les firmes peuvent identifier ce qu'un comportement « coopératif » signifie malgré les variations de demande et de coûts.

Ne pas confondre

- actualisation de l'avenir ;
- observabilité d'une action ;
- volatilité de la demande ;
- taille du gain immédiat d'une déviation.

Bilan de la §1.4

Structure	Résultat	Mécanisme
Jeu joué une fois	Prix bas	Dominance
Répété N fois, N connu	Prix bas à chaque tour	Détricotage à rebours
Répété indéfiniment	Prix élevés soutenable si $\delta \geq 5/9$	Menace de représailles
Horizon incertain	Prix élevés plausibles	Pas de dernier tour

La question qui reste

Une punition annoncée aujourd'hui ne dissuade une déviation que si elle sera effectivement optimale lorsqu'il faudra l'exécuter. Il faut donc vérifier la **rationalité séquentielle après chaque histoire**. Les jeux séquentiels vont nous permettre d'introduire cette idée ; elle sera formalisée par l'**équilibre parfait en sous-jeux**.

1.5 — Jeux séquentiels

Moment interactif n°8 : et si l'un jouait en premier ?

Question ouverte — 3 minutes

Retour aux céréales, mais la **sucrée** rapporte davantage. Chabrier peut lancer **avant** Duval.

		Duval	
		Croustillante	Sucrée
Chabrier	Croustillante	−5 ; −5	10 ; 20
	Sucrée	20 ; 10	−5 ; −5

Que fait Chabrier ? Et cela change-t-il quelque chose au résultat ?

Le jeu séquentiel

Définition — jeu séquentiel (*sequential game*)

Un **jeu séquentiel** est un jeu dans lequel les joueurs jouent **à tour de rôle**, en réagissant aux actions et aux réactions des autres.

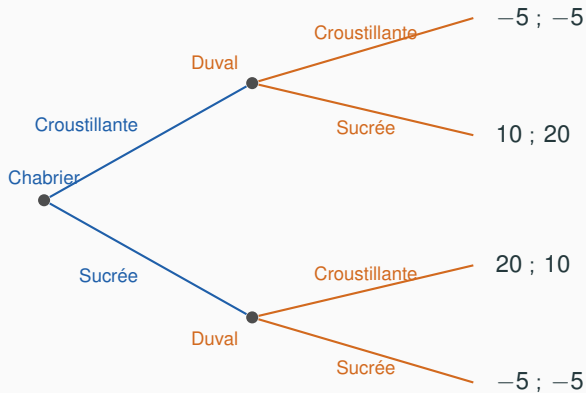
Exemples

- Stackelberg : une firme fixe sa quantité en premier.
- Une campagne publicitaire et la riposte du rival.
- L'investissement de dissuasion, puis la décision d'entrer.

Information parfaite

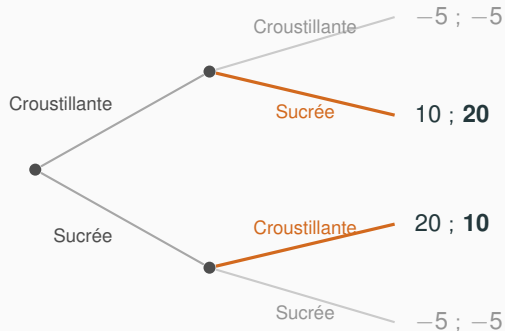
Le second joueur **observe** le coup du premier avant de jouer : c'est l'**information parfaite**, distincte de l'information complète (☞ §1.1).

La forme extensive : l'arbre de jeu



Nœuds = qui joue ; branches = actions possibles ; extrémités = gains, dans l'ordre (Chabrier ; Duval).

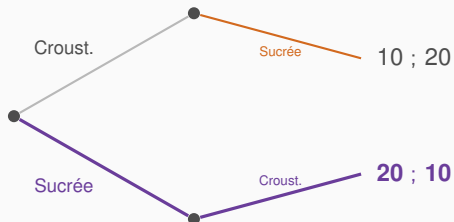
Étape 1: induction à rebours – que fait Duval ?



Règle

On commence par la **fin**. À chaque nœud terminal, on retient l'action qui maximise le gain du joueur qui y décide. Duval joue toujours **l'autre** céréale.

Étape 2: induction à rebours – que fait Chabrier ?



Chabrier compare les **seules** issues encore possibles :

- Croustillante $\Rightarrow$ il gagne 10 ;
- Sucrée $\Rightarrow$ il gagne 20.

Il lance la sucrée.

Solution du jeu

(Chabrier : *Sucrée* ; Duval : *la céréale que Chabrier n'a pas lancée*).

Gains : **20** pour Chabrier, **10** pour Duval.

L'avantage au premier joueur

Comparaison

- **Jeu simultané** – Le jeu possède deux équilibres de Nash en stratégies pures :
(Croustillante, Sucrée) et (Sucrée, Croustillante).
Le jeu lui-même ne permet pas de savoir lequel sera sélectionné. (Sucrée, Sucrée) est un **échec de coordination possible**, mais ce n'est pas un équilibre de Nash.
- **Jeu séquentiel** – Si Chabrier joue en premier et que son choix est observable et engagé, il choisit Sucrée ; Duval répond Croustillante.
Gains : (20, 10).

First-mover advantage

Ici, jouer en premier permet à Chabrier de **sélectionner l'équilibre qu'il préfère**.

Paradoxe apparent : **se lier les mains peut être un avantage**.

Ce n'est pas général

L'avantage au premier joueur **n'est pas une loi**. Dans d'autres jeux (choix de technologie, concurrence en prix avec produits différenciés), c'est le **second** qui est avantageux car il observe avant de choisir.

Le cas canonique : Stackelberg contre Cournot

		Firme 2 produit		
		7,5	10	15
Firme 1 produit	7,5	112,5 ; 112,5	93,75 ; 125	56,25 ; 112,5
	10	125 ; 93,75	100 ; 100	50 ; 75
	15	112,5 ; 56,25	75 ; 50	0 ; 0

Demande $P = 30 - Q$, coût marginal nul.

- **Coups simultanés** : équilibre de Cournot $q_1 = q_2 = 10$, profits 100 et 100.
- **Firme 1 joue en premier** : elle choisit $q_1 = 15$, la meilleure réponse de la firme 2 est $q_2 = 7,5$. Profits 112,5 et 56,25.

Ce qui rend l'avantage réel : l'engagement

Une difficulté

Si la firme 1 peut **revenir sur sa décision** après avoir vu celle de la firme 2, l'avantage disparaît entièrement. La firme 2 le sait et produit beaucoup.

Condition nécessaire

L'avantage au premier joueur exige un **engagement irréversible** : capacité installée, contrat signé, usine construite, annonce coûteuse à démentir.

Suite ➡ §1.6 à 1.8

Menaces crédibles et engagements (➡ 1.6), dissuasion à l'entrée (➡ 1.7), enchères (➡ §1.8). Seront mobilisés ➡ séance V les §1.6 et §1.7. Les enchères relèvent du ➡ **chapitre 3** (asymétrie d'information).

Est-ce que simultané veut dire au même instant ?

Est-ce que simultané veut dire au même instant ?

Réponse

Non. « Simultané » signifie que **chacun décide sans avoir observé la décision de l'autre**.

Deux firmes qui envoient leur tarif à l'imprimerie à trois semaines d'intervalle, sans se voir, jouent un jeu **simultané**. Deux firmes dont l'une annonce publiquement avant l'autre jouent un jeu **séquentiel**, même si l'écart est d'une heure.

Le critère est l'information, pas la chronologie.

Bilan de la §1.5

Notion	Définition	Ce qu'elle apporte
Forme extensive	Arbre : nœuds, branches, gains terminaux	Rend l'ordre des coups visible
Induction à rebours	Choix optimal à chaque nœud, depuis la fin	Équilibre parfait en sous-jeux*
Avantage au 1 ^{er} joueur	Restreindre l'autre en se restreignant	Explique Stackelberg
Engagement	Irréversibilité de son propre choix	Condition de l'avantage

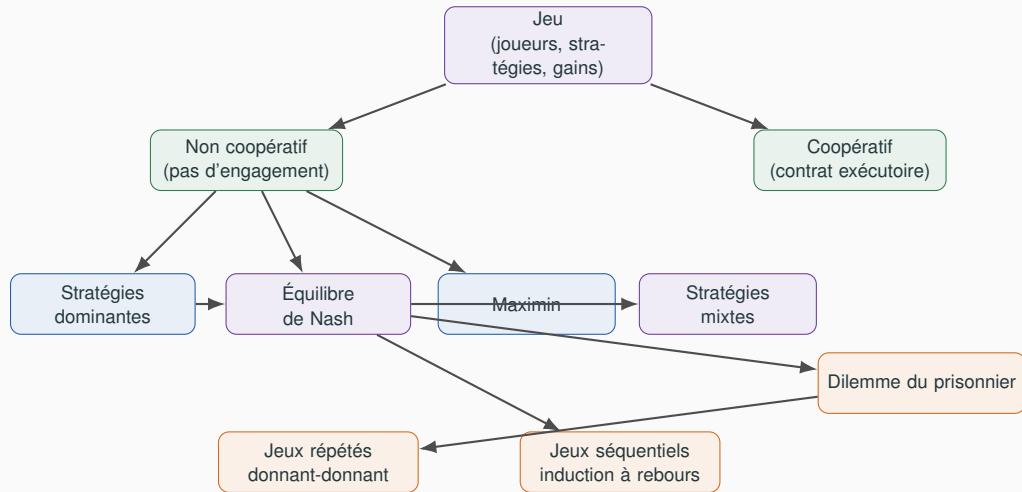
* Dans un jeu fini à information parfaite, l'induction à rebours construit un équilibre parfait en sous-jeux.

Le point le plus important

L'équilibre parfait en sous-jeux est un raffinement de Nash, il élimine les équilibres qui reposent sur des menaces non optimales lorsqu'arrive effectivement le moment de les exécuter.

Synthèse et articulation

Carte des concepts de la séance



Ce que la théorie des jeux a réellement apporté

Retour au point de départ

En séance 1, nous avons posé que l'interdépendance stratégique rendait la théorie des jeux nécessaire. Nous pouvons maintenant dire **ce qu'elle apporte**.

1. Un **langage** : joueurs, stratégies, gains, forme normale, forme extensive.
2. Un **concept de solution** général : l'équilibre de Nash, dont la dominance n'est qu'un cas particulier.
3. Un **résultat négatif** fondamental : l'équilibre peut être collectivement inefficace (dilemme du prisonnier).
4. Deux **voies de sortie** : la répétition et l'ordre des coups.
5. Une **limite** : la multiplicité des équilibres, que la théorie ne tranche pas seule.

Articulation : vers les jeux à information incomplète

Ce que nous avons supposé aujourd'hui

- Les gains de **tous** les joueurs sont connus de tous.
- Les règles du jeu sont connaissance commune.
- La seule chose ignorée est **ce que l'autre va jouer**.

Ce qui se passe si on lève cette hypothèse

- Je ne connais plus la **matrice** elle-même.
- Je forme des **croyances** sur le « type » de l'adversaire.
- Il peut **signaler** son type — ou le **cacher**.

La bifurcation du cours

Inconnue = un **état de la nature**, ignoré de tous de la même façon ➡ **chapitre 2 (risque)**.

Inconnue = une **caractéristique d'un joueur**, connue de lui seul ➡ **chapitre 3 (information)**.

Séance 3 : au programme

Ce que nous ferons

- Sous-jeux et **équilibre parfait en sous-jeux**.
- Menaces crédibles et **engagements** (☞ §1.6).
- **Dissuasion à l'entrée** (☞ §1.7).
- Retour sur le cartel : maximisation jointe *et* stabilité.

À faire d'ici là

- Relire Pindyck & Rubinfeld (2018), ☞ §1.1 à 1.5.
- Refaire seuls les trois matrices de la séance par la méthode des meilleures réponses.
- Exercices 3 et 7 du chapitre 13.

Apportez une règle, nous tracerons beaucoup d'arbres.

Questions ?